ОБ ОДНОМ ПРИЁМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ.

Сюткина Светлана Михайловна
Преподаватель математики высшей категории академического лицея Ташкентского государственного экономического университета, город Ташкент, Узбекистан

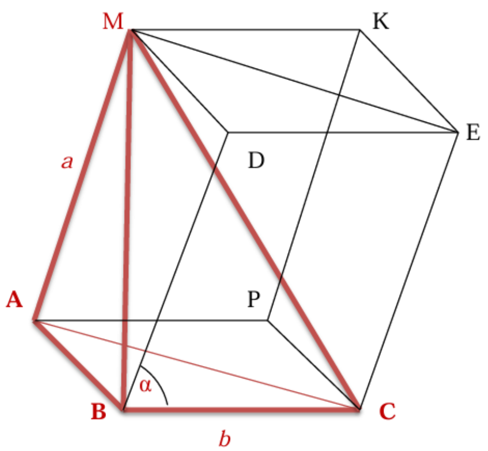
Аннотация. *В данной статье рассматривается способ нахождения объема многогранника путем дополнения его до пирамиды или призмы. Представленный в статье способ показан на примерах.*

Ключевые слова: *многогранник, пирамида, призма, объем, равновеликие фигуры.*

Математические задачи выступают как средство целенаправленного математического развития учащихся, формирования у них познавательного интереса и самостоятельности, развития математических способностей. Именно в ходе решения математических задач самым естественным способом можно формировать у учащихся элементы творческого математического мышления. В данной статье рассмотрим прием решения задач на нахождение объема многогранников.

При выводе формул для вычисления объема призм и пирамид пользуются обычно тем, что некоторые тела рассматривают как составленные из нескольких равновеликих частей (параллелепипед – из двух треугольных призм, треугольную призму – из трех треугольных равновеликих пирамид и т. д.). Этот прием можно использовать и для решения задач.

Рассмотрим на примерах.



З а д а ч а 1. *Вычислить объем треугольной пирамиды, у которой два скрещивающихся ребра, длины которых равны a и b, образуют угол α, а кратчайшее расстояние между ними равно c.*

Д а н о: MABC – пирамида, AM = *a*, BC = *b*, расстояние между ребрами AM и BC равно *c*, а угол между ними равен α.

Н а й т и: V_{MABC}

Р е ш е н и е.

Проведя соответствующие плоскости, достроим данную пирамиду до треугольной призмы ABCMDE, а затем до параллелепипеда ABCPMDEK. Так как BD‖AM, то ∠DBC= α. Известно, что расстояние между скрещивающимися прямыми (AM и BC) равно расстоянию между одной из этих прямых (AM) и плоскостью (BDEC), проходящей через другую прямую (BC) и параллельной первой прямой; поэтому, если принять за основание параллелепипеда грань BDEC, то высота параллелепипеда будет равна *c*.

Так как $S_{BDEC} = ab\sin\alpha$, то объем параллелепипеда будет равен:

$V_{\text{пар}} = abc\sin\alpha,$

объем призмы ABCMDE: $V_{\text{пр}} = \frac{1}{2}abc\sin\alpha$, а объем данной пирамиды:

$V_{MABC} = \frac{1}{6}abc\sin\alpha.$

З а д а ч а 2. *В треугольной пирамиде две грани – равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых b, а угол между ними α. Определить объем пирамиды.*

Р е ш е н и е. Рассмотрим разные виды расположения прямых углов данных прямоугольных треугольников.

1) Оба прямых угла являются плоскими углами при вершине пирамиды (рис. 1).

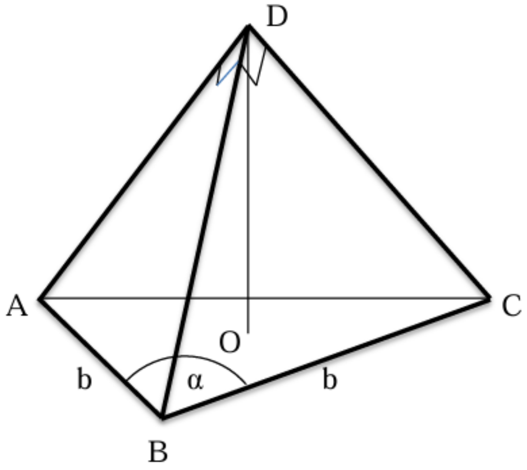


Рис. 1.

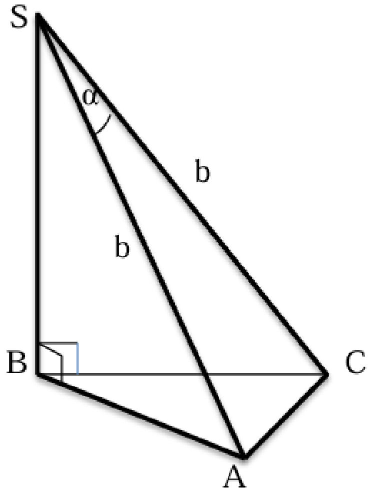


Рис. 2.

2) Оба прямых угла являются плоскими углами в боковых гранях пирамиды при одной и той же вершине основания (рис. 2).

Нетрудно заметить, что второе расположение сводится к первому, если за основание пирамиды принять боковую грань ASC.

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta\, ABC} \cdot BS$$

Из ΔACS по теореме косинусов: $AC = \sqrt{b^2 + b^2 - 2b^2\cos\alpha} = 2b\sin\frac{\alpha}{2}$.

Из ΔABS: $BS = AB = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

Чтобы найти площадь основания (равнобедренный треугольник ABC), сначала найдем его высоту, проведенную к основанию треугольника AC:

$$h = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{2} - b^2 sin^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{b^2\cdot\frac{\cos\alpha}{2}} = \frac{b\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{2}}.$$

Подставим в формулу объема пирамиды: $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2b\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{b\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{b\sqrt{2}}{2}$

Объем пирамиды получается равным:

$$V = \frac{1}{6}b^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}.$$

3) Прямые углы не имеют общей вершины. В этом случае угол α будет углом между скрещивающимися прямыми.

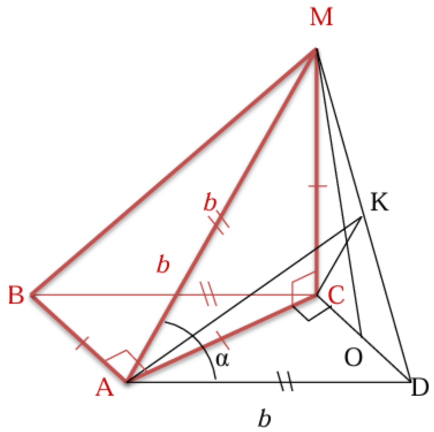


Рис. 3.

Пусть в пирамиде *MABC* $\angle MCA = \angle BAC = 90^o$, $MA = BC = b$; $AB = AC = MC = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

Проведем $AD \parallel BC$, тогда $\angle MAD = \alpha$.

Проведем еще CD||BA и соединим точки *M* и *D*. Так как $AC \perp CD$ и $AC \perp CM$, то $AC \perp$пл.MCD и, следовательно, пл. $ABCD \perp$пл.MCD.

Таким образом, перпендикуляр *MO*, опущенный из вершины *M* на плоскость *ABC* (т. е. высота пирамиды *MABC*), должен целиком лежать в плоскости *MCD* и служить высотой треугольника *MCD.* Найдем эту высоту.

В равнобедренном треугольнике *MAD* проводим $AK \perp MD$, тогда $KD = \frac{1}{2}MD = b\sin\frac{\alpha}{2}$. В равнобедренном треугольнике *MCD* медиана *CK* является одновременно и высотой; из треугольника *DCK* находим:

$$CK = \sqrt{CD^2 - DK^2} = \sqrt{\frac{b^2}{2} - b^2 sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - 2sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos\alpha}$$

Площадь треугольника CMD:

$$S_{\Delta CMD} = \frac{1}{2}MD\cdot CK = \frac{1}{2}\cdot 2b\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{b\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{2}} = \frac{b^2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{2}}$$

и, наконец, $MO = \frac{2S_{\Delta CMD}}{CD} = \frac{2b^2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{2}}} = 2b\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$.

Искомый объем:

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot MO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} \cdot 2b \sin\frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos\alpha} = \frac{1}{6} b^3 \sin\frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos\alpha}.$$

Ответ показывает, что эта пирамида равновелика пирамидам тех двух видов, о которых говорилось выше.

Это можно доказать и непосредственно. В самом деле, данная пирамида MABC равновелика пирамиде MACD, либо они имеют равные основания: $\Delta ABC = \Delta ADC$, расположенные в одной плоскости, и общую вершину M. Если теперь в пирамиде MACD принять за вершину пирамиды точку C, то нетрудно заметить, что получающаяся при этом пирамида CAMD имеет при вершине C два плоских угла: $\angle ACM = \angle ACD = 90^o$.

Таким образом, при решении задач на нахождение объема многогранников можно использовать дополнение этого многогранника до пирамиды или призмы или разбиение на такие фигуры, а также можно менять расположение многогранника.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Постановление президента Республики Узбекистан от 7 мая 2020 года № ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики».
2. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990.
3. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. Цыпкин А. Г., Пинский А. И./Под ред. В. И. Благодатских. – М. Наука, 1989.

Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Под ред. М. И. Сканави. – М.: Мир и образование, 2013.