FREDGOLM INTEGRAL TENGLAMASINI TAQRIBIY YECHISHNING "CHEKLI YIG'INDILAR" USULI

Sayliyeva Gulrux Rustam qizi
Buxoro davlat universiteti, Fizika-matematika fakulteti
g.r.saylieva@buxdu.uz

Anotatsiya. *Ushbu maqolada 1- va 2- tur Fredgolm integral tenglamalarini asosiy taqribiy yechish usullari bo'lmish, "Chekli yig`indilar" usulidan foydalanish ketma-ketligi batafsil tushuntirilgan, hamda bu usulning qo'llanilishiga doir bir nechta chiziqli integral tenglamalardan misollar berilgan.*

Kalit so'zlar: *Fredgolm integral tenglamasi, integral tenglamani taqribiy yechish, "Chekli yig'indilar" usuli.*

THE "FINITE SUM" METHOD OF APPROXIMATE SOLUTION OF THE FREDHOLM INTEGRAL EQUATION

Sayliyeva Gulrukh Rustam kizi
Bukhara State University, Faculty of Physics and Mathematics

Anotation. *This article explains in detail the sequence of using the "Finite sums" method, which is the main approximate solution method for Fredholm integral equations of the first and second type, and gives examples of several linear integral equations on the application of this method.*

Keywords: *Fredholm integral equation, approximate solution of integral equation, "Finite sums" method.*

МЕТОД «КОНЕЧНОЙ СУММЫ» ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

Сайлиева Гульрух Рустама кызи
Бухарский государственный университет, физико-математический факультет

Абстракт. *В данной статье подробно объясняется последовательность использования метода «Конечных сумм», который является основным методом приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма 1-*

го и 2-го типа, и приводятся примеры нескольких линейных интегральных уравнений по применению этого метода.

Ключевые слова: *Интегральное уравнение Фредгольма, приближенное решение интегрального уравнения, метод «конечных сумм».*

Fredgolm integral tenglamalarini yechishning taqribiy usullaridan biri "Chekli yig'indilar" usulidir. Ushbu usul aniq integralni kvadratura formulasi yordamida taqribiy yechishga asoslanadi [1]. Bizga (1) ko'rinishdagi 2-tur Fredgolm integral tenglamasi berilgan bo'lsin:

$$U(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\,U(y)dy=f(x) \qquad (1)$$

Ushbu integral tenglamada $U(x)$- noma'lum funksiya, $K(x,y)$ va $f(x)$ funksiyalar mos ravishda $\{a\le x\le b\}$ kvadratda va $a\le x\le b$ oraliqda aniqlangan funksiyalar (a,b – o'zgarmas sonlar) demak, kvadrat va oraliqni asosiy kvadrat va asosiy oraliq deb ataymiz [2-5]. $f(x)$ funksiya (1) integral tenglamaning ozod hadi $K(x,y)$ uning yadrosi λ sonli ko'paytuvchi tenglamaning parametri deyiladi. Qo'shimcha yana quyidagi shartlarni kiritamiz. Integral tenglamaning $K(x,y)$ yadrosi va $f(x)$ ozod funksiyasi asosiy sohada yetarlicha tartibda uzluksiz hosilalarga ega bo'lsin.Biz biror kvadratik formani olib,

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}A_k\Phi_k(x_k) \qquad (2)$$

(2) da x_k lar $[a,b]$ segmentdagi nuqtalar; A_k, $k=1,2,3,\dots,n$) lar esa $\Phi(x)$ funksiyaning tanlanishidan bog'liq bo'lmagan sonli koeffitsiyentlardir [6-7]. Odatda A_k sonli koeffitsiyentlarni quydagicha tanlanadi:

$$A_k\ge 0,\quad \sum_{i=1}^{n}A_k=b-a$$

Masalan:

$$x_k=a+(k-1)h,\quad h=\frac{b-a}{n-1}\ ,$$

bo'lsa, sonli koeffitsiyentlar uchun quyidagilar o'rinli:

1. To'g`ri to'rtburchak formulasi uchun:

$$x_1=a,\qquad x_2=a+h,\quad x_3=a+2h,\dots,x_n=a+(n-1)h=b;$$

$$A_1=A_2=A_3=\cdots=A_n=h\,,\quad bu\ yerda\ \ h=\frac{b-a}{n}$$

2. Trapetsiya umumiy formulasi uchun:

$$x_1=a,\qquad x_2=a+h,\quad x_3=a+2h,\dots,x_n=a+(n-1)h=b;$$

$$A_1=A_n=\frac{h}{2},\qquad A_2=A_3=\cdots=A_{n-1}=h\,,\quad bu\ yerda\ \ h=\frac{b-a}{n-1}$$

3. $n = 2m + 1$ bo'lgandagi barcha turdagi Simpson formulasi uchun:

$$x_1 = a, \qquad x_2 = a + h, \dots, x_{2m+1} = a + 2mh = b;$$

$$A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3}, \qquad A_2 = A_4 = \cdots = A_{2m} = \frac{4h}{3},$$

$$A_3 = A_5 = \cdots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3} \quad bu\ yerda\ \ h = \frac{b-a}{2m}$$

Simpson formulasida m, $[a,b]$ kesma ichidagi nuqtalar soni. Bo'linish nuqtalari va ularga mos koeffitsiyentlarni aniqlab olganimizdan keyin [8-13], taqribiy yechishni quyidagicha davom ettiramiz. Dastlab har bir x_k nuqtani birin-ketin (1) integral tenglamaga qo'yib chiqamiz.

$$U(x_k) - \lambda \int_a^b K(x_k, y)\, U(y)dy = f(x_k), \ \ k = 1,2, \dots, n \qquad (3)$$

(3) ning chap tomonidagi integralni (2) kvadratik formuladagi yig`indi bilan almashtiramiz.

$$U(x_k) - \lambda \sum_{m=1}^{n} A_m \mathrm{K}(x_k, x_m) U(x_m) = f(x_k), \ \ k = 1,2, \dots, n \qquad (4)$$

Natijada (4) sistema n ta $U(x_1), U(x_2), \dots, U(x_n)$ noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qiladi. Ushbu sistemani yechib, noma'lum funksiyalarni aniqlaymiz [14-18]. Topilgan $U(x_k), k = 1,2, \dots, n$ lardan foydalanib, taqribiy yechimni quyidagicha ifodalaymiz.

$$\widetilde{U(x)} = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{n} A_m \mathrm{K}(x, x_m) U(x_m)$$

Endi ushbu taqribiy yechish usulini qo'llab, berilgan integral tenglamaning taqribiy yechimini hisoblaymiz.

1.Misol.

$$U(x) + \int_0^1 x(e^{xt} - 1)U(t)dt = e^x - x \qquad (5)$$

Yechim.

Dastlab Simpson formulasidan foydalanib, $m = 1$ uchun [0,1] kesmadan 3 ta,

$x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 1$ nuqtalarni hosil qilamiz, bu holatda $h = \frac{1-0}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$ ekanligidan foydalandik. Bu nuqtalarga mos $A_1 = A_3 = \frac{1}{6}$, $A_2 = \frac{2}{3}$ topilgan nuqtalarni navbat bilan (5) integral tenglamaning x o'zgaruvchilarining o'rniga qo'yamiz va ushbu tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} U(0)=1 \\ U(0,5)+\int\limits_0^1 0,5(e^{0,5t}-1)U(t)dt = e^{0,5}-0,5 \\ U(1)+\int\limits_0^1 (e^t-1)U(t)dt = e-1 \end{cases} \qquad (6)$$

(6) chiziqli tenglamalar sistemasini tashkil etuvchi har bir tenglamadagi integrallarni Simpson formulasidan foydalanib, quyidagicha integral bilan almashtiramiz:

$$\int_0^1 \Phi(t)\,dt \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \Phi_k(x_k) = \frac{1}{6}\Phi(0) + \frac{2}{3}\Phi(0,5) + \frac{1}{6}\Phi(1) =$$
$$= \frac{\Phi(0)+4\Phi(0,5)+\Phi(1)}{6} \qquad (7)$$

Bu yerda $\Phi(t)$ har bir tenglamadagi integral ostidagi funksiyadir. (48) ning 1-tenglamasi tarkibida integral mavjud emas, shu sababli 2-tenglamadagi integraldan boshlaymiz:

$$\Phi(t) = \frac{(e^{0,5t}-1)U(t)}{2}$$

Dastlab $\Phi(t)$ funksiyaning har bir x_k nuqtadagi qiymatlarini hisoblab chiqamiz. Hisoblashlarda sonning taqribiy qiymatlaridan foydalanishimiz mumkin [19-23].

$$\Phi(0)=0, \qquad \Phi(0,5) = \frac{(e^{0,25}-1)U(0,5)}{2}, \qquad \Phi(1) = \frac{(e^{0,5}-1)U(1)}{2}$$

Ushbu topilganlarni (49) formuladan foydalanib, 2-tenglama tarkibidagi integralni yig`indi bilan almashtiramiz:

$$\int\limits_0^1 0,5(e^{0,5t}-1)U(t)dt \approx \frac{(e^{0,25}-1)}{3}U(0,5) + \frac{(e^{0,5}-1)}{12}U(1) \qquad (8)$$

Ushbu almashtirishni (6) tenglamalar sistemasining 2-tenglamasiga qo'yib, noma'lum funksiyalar bo'lmish $U(0), U(0,5), U(1)$ larga bog`liq ifodani hosil qilamiz:

$$U(0,5) + \frac{(e^{0,25}-1)}{3}U(0,5) + \frac{(e^{0,5}-1)}{12}U(1) = e^{0,5}-0,5$$

Soddalashtirishlardan so'ng,

$$\frac{(e^{0,25}+2)}{3}U(0,5) + \frac{(e^{0,5}-1)}{12}U(1) = e^{0,5}-0,5 \qquad (9)$$

ifoda hosil bo'ldi. Yuqorida bajarilgan jarayonni (6) sistemasning 3-tenglamasi tarkibidagi integral uchun ham amalga oshirib, sistemaning 3-tenglamasiga mos bo'lgan ifodani ham hosil qilamiz:

$$\Phi(t) = (e^t-1)U(t)$$

$$\Phi(0)=0,\qquad \Phi(0{,}5)=(e^{0{,}5}-1)U(0{,}5)\,,\qquad \Phi(1)=(e^{1}-1)U(1)$$

$$\int_0^1 (e^{t}-1)U(t)dt\ \approx \frac{4(e^{0{,}5}-1)U(0{,}5)+(e^{1}-1)U(1)}{6} \tag{10}$$

(10) yig`indini (6) sistemaning 3-tenglamasiga qo'yib, quyidagi navbatdagi ifodani hosil qilamiz:

$$U(1)+\frac{4(e^{0{,}5}-1)U(0{,}5)+(e^{1}-1)U(1)}{6}=e-1$$

Soddalashtirishlardan so'ng,

$$\frac{2(e^{0{,}5}-1)}{3}U(0{,}5)+\frac{e^{1}+5}{3}U(1)=e-1 \tag{11}$$

ifoda hosil bo'ladi. Hosil qilingan (9), (10) ifadalarni (6) sistemaga qo'yamiz.

$$\begin{cases} U(0)=1 \\ \dfrac{(e^{0{,}25}+2)}{3}\,U(0{,}5)+\dfrac{(e^{0{,}5}-1)}{12}U(1)=e^{0{,}5}-0{,}5 \\ \dfrac{2(e^{0{,}5}-1)}{3}U(0{,}5)+\dfrac{e^{1}+5}{3}U(1)=e-1 \end{cases}$$

yoki, yaxlitlashlardan foydalanib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} U(0)=1 \\ 1{,}0947\,U(0{,}5)+0{,}0541U(1)=1.1487 \\ 0{,}4325U(0{,}5)+1{,}2864U(1)=1{,}7183 \end{cases} \tag{12}$$

(12) sistemani yechamiz.

$$U(0)=1,\ \ U(0{,}5)=0{,}9999\,,\ \ U(1)=0{,}9996.$$

Topilgan qiymatlarni taqribiy yechim formulasiga qo'yib, quyidagi yechimni hosil qilamiz:

$$\widetilde{U(x)}=\ e^{x}-x+\sum_{m=1}^{3}A_m x(e^{xx_m}-1)U(x_m)$$

$x_1=0,\ \ x_2=0{,}5,\ \ \ x_3=1, A_1=A_3=\frac{1}{6},\ \ A_2=\frac{2}{3}$

ekanligidan foydalanib,

$$\widetilde{U(x)}=\ e^{x}-x(0{,}6666e^{0{,}5x}+0.1666e^{x})-0{,}1668x$$

ko'rinishidagi taqribiy yechimni hosil qilamiz. Ta'kidlab o'tishimiz joizki, $[a,b]$ kesmadagi bo'laklashlar sonini qanchalik oshirsak, taqribiy yechim ham shunchalik aniq yechimga yaqinlashadi.

Quyida chekli yig`indilar usulidan foydalanib yechiladigan misollardan namunalar keltiramiz:

1. $U(x)+\displaystyle\int_0^1 xe^{xt}U(t)dt=\ e^{x}$

$$2.\ U(x) + \int_0^1 \frac{x+t}{1+x++t} U(t)dt = \ln\frac{2+x}{1+x}$$

$$3.\ U(x) + \int_0^1 x^2 \cos(\pi x t)\, U(t)dt = \pi x(1+\sin(\pi x)) - 2\sin^2\frac{\pi x}{2}$$

$$4.\ U(x) + \int_0^1 x(e^{xt} - 2)U(t)dt = e^x - x$$

$$5.\ U(x) + \int_0^1 x(\sin(xt) - 1)U(t)dt = x + \cos x$$

$$6.\ U(x) + \int_0^1 (e^{-xt^2} - 1)xU(t)dt = \frac{1}{2}(e^{-x} + 3x - 1)$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. М.Л.Краснов, А.И.Киселов, Г.И.Макаренко, Интегральные уравнения, М.:Едиториал УРСС, 2003.-192 с.

2. Sayliyeva, Gulrux Rustam Qizi. "Diskret matematika va matematik mantiq fanining «predikatlar mantig'i» bobi mavzularini tushuntirishda samarali yondashuv va undagi zamonaviy usul va metodlar." Scientific progress 2.1 (2021): 552-558.

3. Абдуллаева М.А. Применение метода "Рыбий скелет" при решении задач арифметических прогрессии// Центр научных публикаций (buxdu. uz), 8:8 (2022), с. 1156-1166.

4. M. Abdullayeva, "Чала квадрат тенглама" мавзусини ўқитишда "Бумеранг" технологияси// ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu. uz), 8:8 (2021), с. 1651-1660.

5. M. Abdullayeva, Aniq integralning tatbiqlari mavzusini o'qitishda" Charxpalak" texnologiyasi// ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu. uz), 8:8 (2021), с. 1410-1421.

6. M. Abdullayeva, "Determinant va ularning xossalari. Determinant tushunchasi va uni hisoblash" mavzusini o'qitishda svetofor metodini qo'llash// ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu. uz), 8:8 (2021), с. 1661-1670.

7. Abdullayeva M.A. Turli maqsadlarga javob beruvchi testlar orqali talabaning bilim, malaka va ko'nikmalarini nazorat qilish// Science and Education, 5:4 (2024), 445-454.

8. Jumayeva С. ОСНОВЫ И СПОСОБЫ РАЗВИТИЯ РЕЧЕМЫСЛИТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ

ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ //ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu. uz). – 2024. – Т. 45. – №. 45.

9. Jumayeva C. LOCAL INNER DERIVATIONS ON FOUR-DIMENSIONAL LIE ALGEBRAS //ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu. uz). – 2024. – Т. 45. – №. 45.

10. Jumayeva C. “JEGALKIN KO ‘PHADI” MAVZUSINI O ‘QITISHDA INTERFAOL METODLARNI QO ‘LLASH //ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu. uz). – 2023. – Т. 44. – №. 44.

11. Jumayeva C. BA’ZI TO ‘RT O ‘LCHAMLI LI ALGEBRALARINING LOKAL ICHKI DIFFERENSIALLASHLARI //ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu. uz). – 2023. – Т. 44. – №. 44.

12. qizi Jumayeva C. I. et al. Mulohazalar hisobida isbotlanuvchi formulalar: nazariya, amaliyot va tahlil //Science and Education. – 2024. – Т. 5. – №. 4. – С. 455-461

13. Sayliyeva GRQ Diskret matematika va matematik mantiq fanida bul funktsiyalarni jegalkin ko'phadlariga yo'nalish mavzusini materiallarda “matematik domino” metodidan yuklash //Scientific progress. – 2021. – T. 2. – Yo‘q. 2. – 773-780-betlar.

14. Sayliyeva G. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanidan “Ta’riflar, teoremalar, isbotlar, formulalar, misollar” usulidan foydalanish // ILMIY NASHIRLAR MARKAZI (buxdu. uz). – 2021. – T. 8. – Yo‘q. 8.

15. Sayliyeva G. DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ” FANINING AMALIYOT DARSLARIDA O‘TILGAN MAVZUNI MUSTAHKAMLASHDA “G’OYAVIY CHARXPALAK”,“CHARXPALAK” TEXNOLOGIYASI VA “ASSOTSATSIYALAR” METODLARIIDAN FOYDALANISH //ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu. uz). – 2021. – Т. 7. – №. 7.

16. Sharipova M.Sh. Algebraik kasrlarni ko ‘paytirish va bo ‘lish mavzusini o ‘qitishning o ‘ziga xos xususiyatlari. Центр научных публикаций (buxdu. uz) (25:25)(2022)

17. Sharipova M.Sh. Uchinchi tartibli operatorli matritsaning muhim spektr tarmoqlari: 1 o'lchamli hol. Центр научных публикаций (buxdu. uz) (40:40)(2023)

18. Sharipova M.Sh. Usual, quadratic and cubic numerical ranges corresponding to a 3×3 operator matrices. Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. 5:4 (2022) pp. 242-249

19. Sharipova M.Sh. Qirqilgan fok fazosidagi uchinchi tartibli operatorli matritsaga mos kvadratik va kubik sonli tasvirlar. Центр научных публикаций (buxdu. uz) (24:24)(2022)

20. Sharipova M.Sh. Two and three particle branches of the essential spectrum of a 3× 3 operator matrices. Spectrum Journal of Innovation, Reforms and Development 8(2022). pp. 270-274

21. Sayliyeva G. TALABALARNING O'QITILAYOTGAN FANLARGA QIZIQISHINI OSHIRISHDA FOYDALANILADIGAN SAMARALI PEDAGOGIK METODLAR //ILMIY NASHRIYOTLAR MARKAZI (buxdu. uz). – 2023. – T. 44. – Yo‘q. 44.

22. Sayliyeva G. 3×3 operator matritsasining ixcham bo‘lmagan tebranishli asosiy spektri //TsENTR NAUCHNYX PUBLIKATSIY (buxdu. uz). – 2023. – T. 39. – №.

23. Sayliyeva G. TAXMINIY SON KETILISHLAR VA ULARNING QO‘LLANISHI TAHLILI // ILMIY NASHARLAR MARKAZI (buxdu. uz). – 2024. – T. 51. – Yo‘q. 51.

24. Sayliyeva G. n-tartibli bir jinsli DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR UCHUN CHGARA SHARTLARI BO'LGAN YASHIL FUNKSIYANI KURUSHGA DO'R NASALAR // ILMIY MA'LUMOTLAR MARKAZI (buxdu. uz). – 2024. – T. 51. – Yo‘q. 51.

25. Sharipova M.Sh. Sodda irratsional tengsizliklarni yechish usullari. Центр научных публикаций (buxdu. uz) (24:24)(2022)