

О ЕДИНСТВЕННОСТИ АНАЛОГА ЗАДАЧИ ТРИКОМИ В ОБЛАСТИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ БЕСКОНЕЧНОЙ ЧЕТВЕРТИ ЦИЛИНДРА И БЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ

Д.С.Олимова

*Ферганский военно-академический лицей Министерства обороны
"школа Темурабеков", dilfuza.olimova.76@bk.ru*

1. Введение. Постановка задачи

Изучение краевых задач для уравнений смешанного типа в силу его прикладной важности является одной из центральных проблем теории дифференциальных уравнений в частных производных. Впервые Ф.И.Франкль [1] обнаружил важные приложения этих задач в газовой динамике, а И.Н.Векуа [2] указал на важность проблемы уравнений смешанного типа при решении задач, возникающих в безмоментной теории оболочек.

До настоящего времени исследования краевых задач для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами проводились в основном в случае двух независимых переменных. Однако, такие задачи в трехмерных областях остаются малоизученными.

Задача Трикоми для смешанного эллиптико-гиперболического уравнения в трехмерном пространстве с помощью метода интегрального преобразования Фурье впервые исследована в работе [3]. После этой работы появились ряд работ, в которых рассмотрены краевые задачи для различных уравнений эллиптико-гиперболического типа в трехмерных областях (см. например, [4]-[12]).

В данной работе изучается пространственная задачи Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в области, эллиптическая часть которой бесконечной четверти цилиндра, а гиперболическая часть – бесконечная треугольная прямая призма.

Пусть $\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Delta, z \in (0, \infty)\}$, где Δ – область плоскости xOy , ограниченная при $y \geq 0$ дугой $\bar{\sigma}_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ и отрезком $\overline{OM} = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$, а при $y \leq 0$ – отрезками $\overline{OQ} = \{(x, y) : x + y = 0, 0 \leq x \leq 1/2\}$ и $\overline{QP} = \{(x, y) : x - y = 1, 1/2 \leq x \leq 1\}$, $O = O(0, 0)$, $M = M(0, 1)$, $P = P(1, 0)$, $Q = Q(1/2, -1/2)$.



Введем обозначения: $\Omega_0 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_1 = \Omega \cap (y < 0)$; $\Delta_0 = \Delta \cap (y > 0)$, $\Delta_1 = \Delta \cap (y < 0)$; $S_0 = \{(x, y, z) : \sigma_0 \times (0, \infty)\}$,

$$S_1 = \{(x, y, z) : OM \times (0, \infty)\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) : OQ \times (0, \infty)\},$$

$$S_3 = \{(x, y, z) : \bar{\Omega} \cap (z = 0)\}, \text{ где } \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Omega}_1,$$

$$\bar{\Omega}_0 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \geq 1, x \in [0, 1], y \in [0, 1], z \in [0, \infty)\},$$

$$\bar{\Omega}_1 = \{(x, y, z) : -y \leq x \leq y + 1, x \in [0, 1], y \in [-1/2, 0], z \in [0, \infty)\}.$$

В области Ω рассмотрим уравнение

$$U_{xx} + (\operatorname{sgny})U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\beta}{x}U_x + \frac{2\beta}{|y|}U_y + \frac{2\gamma}{z}U_z = 0, \quad (1)$$

где $\beta, \gamma \in R$, причем $\beta \in (0, 1/4)$, $\gamma \in (0, 1/2)$.

В области Ω уравнение (1) принадлежит смешанному типу, а именно в области Ω_0 - эллиптическому типу, а в области Ω_1 - гиперболическому типу, причем $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ являются плоскостями сингулярности уравнения, а при переходе через прямоугольник $\bar{\Omega}_0 \cap \bar{\Omega}_1$ уравнение меняет свой тип.

Исследуем следующую задачу для уравнения (1) в области Ω .

Задача Т (Трикоми). Найти функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (1) и следующим условиям:

$$U(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_0 \cup \Omega_1), \quad (2)$$

$$U(x, y, z)|_{S_0} = 0; \quad (3)$$

$$U(x, y, z)|_{\bar{S}_1} = 0, \quad U(x, y, z)|_{\bar{S}_2} = 0, \quad (4)$$

$$U(x, y, z)|_{\bar{S}_3} = F(x, y), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} U(x, y, z) = 0, \quad (5)$$

а также условию склеивания

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} U_y(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} U_y(x, y, z), \quad x \in (0, 1), \quad z \in (0, c), \quad (6)$$

где $F(x, y)$ - заданная функция.

2. Построение частных решений уравнения (1) в области гиперболичности и эллиптичности уравнения

Находим нетривиальные решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (3), (4). Разделив переменные по формуле $U(x, y, z) = u(x, y)Z(z)$, из уравнения (1) и краевых условий (3) и (4), получим уравнению



$$Z''(z) + \frac{2\gamma}{z}Z'(z) - \lambda Z(z) = 0, \quad 0 < z < \infty \quad (7)$$

и следующую задачу на собственные значения:

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \frac{2\beta}{x}u_x + \frac{2\beta}{|y|}u_y + \lambda u = 0, \quad (x, y) \in \Delta, \quad (8)$$

$$u(0, y) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\sigma}_0, \quad (9)$$

$$u(x, -x) = 0, \quad x \in [0, 1/2]. \quad (10)$$

Сначала рассмотрим задачу $\{(8),(9),(10)\}$ в области Δ_1 , т.е. рассмотрим следующую задачу:

$$u_{xx} - u_{yy} + \frac{2\beta}{x}u_x - \frac{2\beta}{y}u_y + \lambda u = 0, \quad (x, y) \in \Delta_1, \quad (11)$$

$$u(x, -x) = 0, \quad x \in [0, 1/2]. \quad (12)$$

Решение этой задачи ищем в виде

$$u(x, y) = X(\xi)Y(\eta), \quad \text{где } \xi = \sqrt{x^2 - y^2}, \quad \eta = x^2 / \xi^2. \quad (13)$$

Тогда относительно функций $X(\xi)$ и $Y(\eta)$, получим следующие

условия $X(0) = 0$, $\left| \lim_{\eta \rightarrow +\infty} Y(\eta) \right| < +\infty$ и уравнение

$$\xi^2 X''(\xi) + (1 + 4\beta)\xi X'(\xi) + [\lambda \xi^2 - \mu] X(\xi) = 0, \quad \xi > 0; \quad (14)$$

$$\eta(1 - \eta)Y''(\eta) + [1/2 + \beta - (1 + 2\beta)\eta]Y'(\eta) + \frac{1}{4}\mu Y(\eta) = 0, \quad \eta > 1, \quad (15)$$

где $\mu \in R$ – константа разделения.

Решение уравнения (14), удовлетворяющие условию $X(0) = 0$, существуют при $\mu > 0$ и они (с точностью до постоянного множителя) имеют вид [13]

$$X(\xi) = \xi^{-2\beta} J_\omega(\lambda \xi), \quad \omega > 2\beta, \quad m \in N, \quad (16)$$

где $\omega = \sqrt{4\beta^2 + \mu}$, а $J_\nu(x)$ – функция Бесселя первого рода.

(15) является гипергеометрическим уравнением Гаусса [14]. Его общее решение определяется формулой [14]

$$Y(\eta) = c_1 \eta^{-\beta - \omega/2} F(\beta + \omega/2, 1/2 + \omega/2, 1 + \omega; 1/\eta) + c_2 \eta^{-\beta + \omega/2} F(\beta - \omega/2, 1 - \omega/2, 1 - \omega; 1/\eta), \quad (17)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, а F – гипергеометрическая функция Гаусса.



Так как $\omega - 2\beta > 0$, то из (17) следует, что для того, чтобы получить ограниченную при $\eta \rightarrow +\infty$ функцию, в формуле надо положить $c_2 = 0$, в итоге чего, получим

$$Y(\eta) = c_1 \eta^{-\beta - \omega/2} F(\beta + \omega/2, 1/2 + \omega/2, 1 + \omega; 1/\eta). \quad (18)$$

Следовательно, непрерывные и нетривиальные в $\bar{\Delta}_1$ решения задачи $\{(11), (12)\}$, согласно (13), (16) и (18), определяются равенствами

$$u_m^-(x, y) = c_1 x^{-2\beta - \omega} (x^2 - y^2)^{\omega/2} J_\omega \left(\sqrt{\lambda(x^2 - y^2)} \right) \times \\ \times F \left(\beta + \frac{\omega}{2}, \frac{1 + \omega}{2}, 1 + \omega; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right), \quad c_1 \neq 0. \quad (19)$$

Отсюда, пользуясь известными формулами [14]

$$F(A, B, C; 1) = \Gamma(C) \Gamma(C - A - B) / [\Gamma(C - A) \Gamma(C - B)], \quad C - A - B > 0, \quad (20)$$

$$F(A, B, C; x) = (1 - x)^{C - A - B} F(C - A, C - B, C; x), \quad (21)$$

находим

$$\begin{cases} \tau_m^-(x) = \lim_{y \rightarrow 0} u_m^-(x, y) = c_1 k_1(\omega) x^{-2\beta} J_\omega(\sqrt{\lambda x}), \quad x \in [0, 1]; \\ v_m^-(x) = \lim_{y \rightarrow 0} (-y)^{2\beta} \frac{\partial}{\partial y} u_m^-(x, y) = c_1 k_2(\omega) x^{-1} J_\omega(\sqrt{\lambda x}), \quad x \in (0, 1), \end{cases} \quad (22)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера [14],

$$k_1(\omega) = \frac{\Gamma(1 + \omega) \Gamma(1/2 - \beta)}{\Gamma(1 - \beta + \omega/2) \Gamma[(1 + \omega)/2]}, \quad k_2(\omega) = \frac{2\Gamma(1 + \omega) \Gamma(1/2 + \beta)}{\Gamma(\beta + \omega/2) \Gamma[(1 + \omega)/2]}.$$

(23)

Теперь рассмотрим задачу $\{(8), (9), (10)\}$ в области Δ_0 , т.е. рассмотрим следующую задачу:

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\beta}{x} u_x + \frac{2\beta}{y} u_y + \lambda u = 0, \quad (x, y) \in \Delta_0, \quad (24)$$

$$u(0, y) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\sigma}_0, \quad (9)$$

Разделив переменные по формуле

$$u(x, y) = Q(\rho) S(\varphi), \quad (25)$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \text{arctg}(y/x)$, из уравнения (24) и условий $u \in C(\bar{\Delta}_0)$

, (9), получим следующие задачи:

$$\rho^2 Q''(\rho) + (1 + 4\beta) \rho Q'(\rho) + [\lambda \rho^2 - \tilde{\mu}] Q(\rho) = 0, \quad \rho \in (0, 1), \quad (26)$$



$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 0, \quad (27)$$

$$S''(\varphi) + 4\beta \operatorname{ctg}(2\varphi)S'(\varphi) + \tilde{\mu}S(\varphi) = 0, \quad \varphi \in (0, \pi/2), \quad (28)$$

$$S(\pi/2) = 0, \quad (29)$$

где $\tilde{\mu} \in R$ - константа разделения.

Сначала исследуем задачи {(26),(27)}. Общее решение уравнения (26) определяется в виде [15]

$$Q_m(\rho) = c_3 \rho^{-2\beta} J_{\tilde{\omega}}(\sqrt{\lambda}\rho) + c_4 \rho^{-2\beta} Y_{\tilde{\omega}}(\sqrt{\lambda}\rho), \quad \rho \in [0,1], \quad (30)$$

здесь $\tilde{\omega} = \sqrt{4\beta^2 + \tilde{\mu}}$, $Y_\nu(x)$ - функция Бесселя второго рода, а c_3 и c_4 - произвольные постоянные.

Из (30) следует, что решения уравнения (26), удовлетворяющие первое из условий (27), существуют при $\tilde{\mu} > 0$ и они определяются равенствами

$$Q_m(\rho) = c_3 \rho^{-2\beta} J_{\tilde{\omega}}(\sqrt{\lambda}\rho), \quad \rho \in [0,1], \quad \tilde{\omega} > 2\beta. \quad (31)$$

Теперь исследуем задачи {(28),(29)}. Общее решение уравнения (28) имеет вид [13]

$$S(\varphi) = c_5 F\left(\beta + \tilde{\omega}/2, \beta - \tilde{\omega}/2, \beta + 1/2; \sin^2 \varphi\right) + \\ + c_6 (\sin \varphi)^{1-2\beta} F\left[(1 + \tilde{\omega})/2, (1 - \tilde{\omega})/2, (3/2) - \beta; \sin^2 \varphi\right], \quad (32)$$

где c_5 и c_6 - произвольные постоянные.

Удовлетворяя функцию (32) условию (29) и применяя формулу (21), получим $c_6 = k_3(\tilde{\omega})c_5$, где

$$k_3(\tilde{\omega}) = -\frac{\Gamma(1/2 + \beta)\Gamma(1 - \beta - \tilde{\omega}/2)\Gamma(1 - \beta + \tilde{\omega}/2)}{\Gamma(3/2 - \beta)\Gamma((1 - \tilde{\omega})/2)\Gamma((1 + \tilde{\omega})/2)}. \quad (33)$$

Подставляя в (32) $c_6 = k_3(\tilde{\omega})c_5$ и полагая $c_5 = 1$ (это не нарушает общности), имеем

$$S(\varphi) = F\left(\beta + \tilde{\omega}/2, \beta - \tilde{\omega}/2, \beta + 1/2; \sin^2 \varphi\right) + \\ + k_3(\tilde{\omega})(\sin \varphi)^{1-2\beta} F\left[(1 + \tilde{\omega})/2, (1 - \tilde{\omega})/2, 3/2 - \beta; \sin^2 \varphi\right]. \quad (34)$$

На основании (25), (31) и (34), заключаем, что непрерывные и нетривиальные в $\bar{\Delta}_0$ решения задачи {(24),(9)}, имеют вид

$$u_m^+(x, y) = c_3 \rho^{-2\beta} J_{\tilde{\omega}}(\sqrt{\lambda}\rho) \left\{ F\left(\beta + \tilde{\omega}/2, \beta - \tilde{\omega}/2, \beta + 1/2; \sin^2 \varphi\right) + \right. \\ \left. + k_3(\tilde{\omega})(\sin \varphi)^{1-2\beta} F\left[(1 + \tilde{\omega})/2, (1 - \tilde{\omega})/2, \frac{3}{2} - \beta; \sin^2 \varphi\right] \right\}, \quad c_3 \neq 0. \quad (35)$$



Отсюда, непосредственным вычислением, находим

$$\begin{cases} \tau_m^+(x) = \lim_{y \rightarrow +0} u_m^+(x, y) = c_3 x^{-2\beta} J_\omega(\sqrt{\lambda}x), & x \in [0, 1]; \\ v_m^+(x) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} \frac{\partial u_m^+(x, y)}{\partial y} = c_3 (1 - 2\beta) k_3(\tilde{\omega}) x^{-1} J_\omega(\sqrt{\lambda}x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (36)$$

Далее, на основании $U(x, y, z) = u(x, y)Z(z)$ и введенных обозначений, из условий $U(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$ и (6) следуют следующие равенства:

$$\begin{cases} \tau_m^-(x) = \tau_m^+(x), & x \in [0, 1], \\ v_m^-(x) = v_m^+(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (37)$$

Подставляя (22) и (36) в (37) и полагая $\omega = \tilde{\omega}$, имеем однородную систему уравнений относительно c_1 и c_3 :

$$\begin{cases} k_2(\omega)c_1 - (1 - 2\beta)k_3(\omega)c_3 = 0, \\ k_1(\omega)c_1 - c_3 = 0, \end{cases} \quad (38)$$

где $k_1(\omega)$, $k_2(\omega)$, $k_3(\omega)$ – постоянные, определяемые формулами (23), (33).

Система (38) имеет нетривиальное решение. Поэтому основной определитель её равен нулю. Составляя основной определитель системы (38) и приравнивая её к нулю, а затем, используя формулу [14] $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi / \sin(z\pi)$, $z \notin Z$, имеем тригонометрическое уравнение относительно ω : $\sin[\pi(\beta + \omega/2)] + \cos(\omega\pi/2) = 0$. Выписывая решения этого уравнения и принимая во внимание условие $\omega > 2\beta$, находим

$$\omega_n = 2n - \beta - 1/2, \quad n \in N. \quad (39)$$

На основании (39), числа $\mu_n = \omega_n^2 - 4\beta^2$, $n \in N$ являются собственными значениями задач $\{(15), \left| \lim_{\eta \rightarrow +\infty} Y(\eta) \right| < +\infty\}$ и $\{(28), (29)\}$.

Подставляя (39) в (31), а потом ее к второму условий из (27), имеем уравнению для отыскание параметра λ :

$$J_{\omega_n}(\sqrt{\lambda}) = 0. \quad (40)$$

Известно, что при $l > -1$ функция Бесселя $J_l(z)$ имеет счетное число нулей, причем все они вещественны и с попарно противоположными знаками [16]. Так как $\omega_n > 2\beta$, то уравнение (40) имеет счетное число вещественных корней. Обозначая через σ_m – m -ый положительный корень



уравнения (40), получим значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи $\{(26),(27)\}$ т.е. собственные значения задачи $\{(26),(27)\}$: $\lambda = \lambda_m = \sigma_m^2, m \in N$.

Учитывая доказанное выше и равенства (19), (35), $\omega = \tilde{\omega} = \omega_n, \lambda = \sigma_m^2, c_3 = k_1(\omega_n)c_1$ (это следует из системы (38)) и полагая $c_5 = 1$ (это не нарушает общности), заключаем, что функции

$$u_{nm}(x, y) = \begin{cases} \rho^{-2\beta} J_{\omega_n}(\sigma_m \rho) \left\{ F\left(\beta + \frac{\omega_n}{2}, \beta - \frac{\omega_n}{2}, \beta + \frac{1}{2}; \sin^2 \varphi\right) + \right. \\ \left. + k_3(\omega_n)(\sin \varphi)^{1-2\beta} F\left(\frac{1+\omega_n}{2}, \frac{1-\omega_n}{2}, \frac{3}{2} - \beta; \sin^2 \varphi\right) \right\}, (x, y) \in \bar{\Delta}_0; \\ k_1^{-1}(\omega_n) x^{-2\beta-\omega_n} (x^2 - y^2)^{\omega_n/2} J_{\omega_n}(\sigma_m \sqrt{x^2 - y^2}) \times \\ \times F\left(\beta + \frac{\omega_n}{2}, \frac{1+\omega_n}{2}, 1 + \omega_n; 1 - \frac{y^2}{x^2}\right), (x, y) \in \bar{\Delta}_1, n, m \in N \end{cases}$$

(41)

являются непрерывными и нетривиальными в $\bar{\Delta}$ решениями задачи $\{(8),(9),(10)\}$.

В работе [13] доказана, что при $0 < \beta < 1/4$ система собственных функций полна в пространстве $L_2(\Delta_0)$.

Теперь рассмотрим уравнение (7). Общее решение уравнения (7) при $\lambda_m = \sigma_m^2, m \in N$, имеет вид [17]

$$Z_m(z) = c_7 z^{1/2-\gamma} I_{1/2-\gamma}(\sigma_m z) + c_8 z^{1/2-\gamma} K_{1/2-\gamma}(\sigma_m z), \quad (42)$$

где c_7 и c_8 - произвольные постоянные, а $I_l(x)$ и $K_l(x)$ - функция Бесселя мнимого аргумента и функция Макдональда порядка l [16] соответственно.

По второй условий (5) решение $U(x, y, z)$ уравнения (1) имеет ноль на бесконечности, поэтому функции $Z_m(z)$ при $z \rightarrow \infty$ должно иметь ноль. Из равенство (42), на основании асимптотических поведений функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ при больших z [18, стр. 173]:

$$I_\nu(z) \approx \frac{e^z}{(2\pi z)^{1/2}}, \quad K_\nu(z) \approx \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z},$$



следует, что $c_7 = 0$, так как функция $z^{1/2-\gamma} I_{1/2-\gamma}(\sigma_m z)$ при $z \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности. Тогда, полагая в (42) $c_7 = 0$, имеем

$$Z_m(z) = c_8 z^{1/2-\gamma} K_{1/2-\gamma}(\sigma_m z). \quad (43)$$

Таким образом, в области Ω частные решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (2)-(4), (6) и второе из условий (5), определяется формулой

$$U_{nm}(x, y, z) = u_{nm}(x, y) Z_m(z), \quad n, m \in N, \quad (44)$$

где $Z_m(z)$ и $u_{nm}(x, y)$ – функции, определяемые равенствами (43) и (41) соответственно.

3. Единственность решения задачи T

Решение задачи T в области Ω_0 будем искать в виде суммы ряда

$$U(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{8nm} u_{nm}(x, y) z^{1/2-\gamma} K_{1/2-\gamma}(\sigma_m z), \quad (45)$$

где $u_{nm}(x, y)$ – функции, определяемые равенством (43), а c_{8nm} – пока неизвестные коэффициенты.

Предположим, что ряд (45) в $\bar{\Omega}_0$ сходится равномерно. Тогда умножая обе части этого равенства на $u_{kl}(x, y)$ и интегрируя по области Δ_0 , имеем

$$\|u_{kl}\|^2 z^{1/2-\gamma} K_{1/2-\gamma}(\sigma_l z) c_{8kl} = \iint_{\Delta_0} U(x, y, z) u_{kl}(x, y) dx dy, \quad k, l \in N, \quad (46)$$

$$\text{где } \|u_{kl}\|^2 = \iint_{\Delta_0} u_{kl}^2(x, y) dx dy.$$

Из (46) при $k = n, l = m$ (это для удобства) в силу первой условия из

(5), находим коэффициенты c_{8nm} в виде $c_{8nm} = \frac{2^{1/2+\gamma} \sigma_m^{1/2-\gamma}}{\Gamma(1/2-\gamma)} F_{nm}$, где

$$F_{nm} = \frac{1}{\|u_{nm}\|^2} \iint_{\Delta_0} F(x, y) u_{nm}(x, y) dx dy. \quad (47)$$

Теперь можем доказать следующую теорему.

Теорема 1. Если существует решение задачи T, то оно единственно.

Доказательство. Для этого достаточно доказать, что однородная задача T имеет только тривиальные решения. Пусть $F(x, y) \equiv 0$. Тогда $F_{nm} = 0$ и $c_{8nm} = 0$ при всех $n, m \in N$. На основании этого, из (46) следует, что



$$\iint_{\Delta_0} U(x, y, z) u_{nm}(x, y) dx dy = 0.$$

Отсюда, в силу полноты системы собственных функций (41) в пространстве $L_2(\Delta_0)$ и $U(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_0)$, следует $U(x, y, z) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_0$.

Пользуясь этим равенством, легко убедиться, что $U(x, +0, z) \equiv 0$, $\lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} U_y(x, y, z) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$, $z \in [0, c]$.

Тогда, в силу условий склеивания (6), справедливы равенства $U(x, -0, z) \equiv 0$, $\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} U_y(x, y, z) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$, $z \in [0, c]$. (48)

Из результатов работы [19] следует, что решение уравнения

$$U_{xx} - U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\beta}{x} U_x - \frac{2\beta}{y} U_y + \frac{2\gamma}{z} U_z = 0, (x, y, z) \in \Omega_1,$$

удовлетворяющее условиям (48), тождественно равно нулю, т.е. $U(x, y, z) \equiv 0$, $(x, y, z) \in \bar{\Omega}_1$. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М., Наука. 1973.
2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М., ГИФМЛ, 1959.
3. Бицадзе А.В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 642–644.
4. Ежов А.М., Пулькин С.П. Оценка решения задачи Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, № 5. С. 978–980.
5. Нахушев А.М. Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта // Дифференц. уравнения. Минск, 1968. Т. 4, № 1. С. 52–62.
6. Пономарев С.М. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в трехмерных областях // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 6. С. 1303–1306.
7. Салахиддинов М.С., Исломов Б. Краевые задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа в пространстве // Узб. мат. журн. 1993. № 3. С. 13–20.
8. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами // Вестник НУУз. – Ташкент, 2016. -№ 2/1. -С. 14-25.



9. Urinov A. K., Karimov K. T. The Dirichlet problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients //Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. – 2017. – Т. 221. – №. 4. – С. 665-683.

10. Назипов И.Т. Решение пространственной задачи Трикоми для сингулярного уравнения смешанного типа методом интегральных уравнений// Известия вузов, -2011. -№3. –С.69-85.

11. Сабитов К.Б., Карамова А.А. Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения// *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, № 4, 133–150.

12. Каримов К.Т. Задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде// Вестник Удмуртского университета. Матем. Мех. Компьютер. науки, –2020, -Т.30, -№1. -С. 31-48.

13. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. –Ташкент: Mumtoz So'z, 2010. -355 с.

14. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра. -М.: Наука, 1973. -296 с.

15. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами// Вестник НУУз. – Ташкент, 2016. -№ 2/1. -С. 14-25.

16. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. –М.: Т.1.Изд. ИЛ., 1949. - 798 с.

17. Urinov A. K., Karimov K. T. The Dirichlet problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients //Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. – 2017. – Т. 221. – №. 4. – С. 665-683.

18. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1963. – 358 с.

19. Каримов Ш.Т. Решение задачи Коши для трехмерного гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами и со спектральным параметром//Узбекский математический журнал. 2014, №2, - С. 55-65.

