YARIM CHEGARALANGAN SILINDRDA BIGARMONIK TENGLAMA UCHUN QO‘YILGAN ICHKI CHEGARAVIY MASALANING ANIQ YECHIMGA INTILUVCHI TAQRIBIY YECHIMI REGULYARIZATSIYA USULI YORDAMIDA QURISH

R.G‘.Rasulov[1,2], A.M.Sattorov[1], D.T. Mahkamova[1], A.B.G‘ulomov[1]

[1)]Farg‘ona politexnika instituti,

[2)]Farg‘ona davlat universiteti

r.rasulov@ferpi.uz,

asattorov751012@gmail.com,

d.mahkamova@ferpi.uz

Annotatsiya. Ushbu maqolada yuqori yarim chegaralangan silindrda bigarmonik tenglama uchun ichki chegaraviy masala qo‘yilib, qo‘yilgan masala yechimining turg‘un emasligini ko‘rsatuvchi misol qurilgan, ya’ni masalaning klassik ma’noda nokorrekt ekanligi ko‘rsatilgan. So‘ngra bu masalaning shartli korrektlikka tekshirilgan hamda korrektlik to‘plamining yuqori chegarasi berilgan holda regulyarizatsiya usuli yordamida masalaning aniq yechimga intiluvchi taqribiy yechimi qurilgan.

Kalit so‘zlar: Nokorrekt masala, shartli korrektlik, regulyarizatsiya usuli, taqribiy yechim.

Abstract: In this article, an inner boundary value problem for a biharmonic equation in an upper half-bounded cylinder is set, and an example is constructed showing that the solution of the given problem is not a type, that is, it is shown that the problem is incorrect in the classical sense. Then, the conditional correctness of this problem was checked and the upper limit of the correctness set was given, and an approximate solution of the problem aiming for an exact solution was built using the regularization method.

Keywords: Incorrect problem, conditional correctness, regularization method, approximate solution.

Аннотация. В статье поставлена внутренняя краевая задача для бигармонического уравнения в полуограниченном сверху цилиндре и построен пример, показывающий, что решение данной задачи не является типом, т. е. показано, что задача некорректна в классическом смысле. Затем проверялась условная корректность этой задачи и задавалась верхняя граница множества корректности, а также методом регуляризации строилось приближенное решение задачи, стремящееся к точному решению.

Ключевые слова: некорректная задача, условная корректность, метод регуляризации, приближенное решение.

Masalaning qo‘yilishi.

$D=\{(r,z);0\le r<R,\ 0<z<+\infty\}$ sohada quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(r,z)$ funsiya topilsin:

$$\Delta^2 u(r,z)=0,\ \ (r,z)\in D \qquad (1)$$

$$u(R,z)=\Delta u(R,z)=0,\ 0<z<+\infty \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u(r,b)}{\partial z}=f(r),\ \Delta u(r,0)=0,\ \ 0<r<R, \qquad (4)$$

$$\lim_{z\to+\infty}\frac{\partial u(r,z)}{\partial z}=0,\ \lim_{z\to+\infty}\Delta u(r,z)=0,\ \ 0<r<R, \qquad (5)$$

bu yerda $0<b<+\infty$, $f(r)$ -berilgan funksiya, $\Delta-$Laplas operatori.

2. Masalani nokorrektligi.

Avval (1)-(5) masala korrrekt qo‘yilmaganligini ko‘rsatamiz. Haqiqatdan ham

$$f(r)=\sqrt{\frac{2R}{\pi\mu_m^{(0)}r}}\,J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r\right) \quad \text{bo‘lganda}$$

$$u_m(r,z)=\sqrt{\frac{2R}{\pi\mu_m^{(0)}r}}\,e^{-\frac{\mu_m^{(0)}}{R}(z-b)}\ J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r\right)(z-b) \qquad (6)$$

funksiya (1)-(5) masalaning yechimi bo‘lishini bevosita tekshirib ko‘rib ishonch hosil qilish mumkin. Bu erda $J_0(x)$ nolinchi tartibli Bessel funksiyasi, $\mu_m^{(0)}$ (m=1,2,.......) sonlar $J_0(\mu)=0$ tenglamaning ildizlari.

Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $N, c>0$ sonlar topiladiki, $m>N$, $0<z<b$ bo‘lganda

$$\left|\frac{\partial u_m(r,b)}{\partial z}\right| = |f(r)| = \left|\frac{2R}{\pi\mu_m^{(0)} r}\cos\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r - \frac{\pi}{4}\right)\right| < \varepsilon,$$

$$|u_m(r,z)| > C > 0$$

bo‘ladi. Bundan masalaning yechimi turg‘un emasligi, yana masala korrekt qo‘yilmaganligi kelib chiqadi.

3. Turg‘unlik baxosi

(1)-(5) korrektlik to‘plami sifatida

$$\|u(r,0)\|_{L_2(0,R)} \le M$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi funksiyalar to‘plamini olamiz.

(1)-(5) masala yechimining turg‘unligini xarakterlovchi quyidagi teorema o‘rinli bo‘ladi.

Teorema: Agar $u(r,z)$ funksiya

$$\|u(r,0)\|_{L_2(0,R)} \le M \qquad (7)$$

$$\left\|\frac{\partial u(r,b)}{\partial r}\right\|_{L_2(0,R)} \le \varepsilon \qquad (8)$$

shartlarni bajarsa, u holda

$$\|u(r,z)\|_{L_2(0,R)} \le \left(\frac{M}{b}\right)^{1-\frac{z}{b}} \varepsilon^{\frac{z}{b}} |z-b| \qquad (9)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Ushbu teoremadan (7) korrektlik to’plamida (1)-(6) masala yechimining yagonaligi kelib chiqadi.

4. Taqribiy yechimni qurish

n butun sonli parametrga bog‘liq bo‘lgan quyidagicha aniqlangan B_n chiziqli operatorlar oilasini qaraymiz.

$$B_n f(r) = (z-b)\sum_{m=1}^{n} a_m e^{-\frac{\mu_m^{(0)}}{R}(z-b)} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r\right), \qquad (10)$$

bu erda

$$a_m = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})}\int_0^R f(r) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r\right) r dr$$

bo‘lib, $a_m - f(r)$ funksiyaning Fure koeffitsentlari.

Agar $f(r)$ va $u(r,z)$ echim $L_2(0,R)$ Gilbert fazosining elementlari deb qaralsa, u holda B_n operatorlar oilasi regulyarlashtiruvchi operatorlar oilasi bo‘ladi.

Endi bu operatorlar oilasini (1)-(5) masalaning taqribiy echimini qurishga qo‘llanilishini ko‘rib chiqamiz.

Faraz qilaylik, bizga (1)-(5) masala shartli korrekt ko‘yilgan va

$$\|u(r,0)\|_{L_2(0,R)} \le M$$

tengsizlik orqali korrektlik to‘plami aniqlangan bo‘lsin.

Aytaylik $f(r)$, δ bo‘yicha aniqlikda berilgan bo‘lsin, ya’ni $f(r)$ o‘rniga $f_\delta(r)$ element berilgan bo‘lib,

$$\| f(r) - f_\delta(r)\|_{L_2(0,R)} \le \delta \qquad (11)$$

bo‘lsin.

(1)-(5) masalaning taqribiy echimi sifatida quyidagi funksiyani olamiz:

$$u_{n\delta}(r,z) = B_n f_\delta(r) = \sum_{m=1}^{n} \overline{a_m} e^{-\frac{\mu_m^{(0)}}{R}(z-b)} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r\right). \qquad (12)$$

Bunda

$$\overline{a}_m = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})}\int_0^R f_\delta(r) I_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r\right) r dr$$

$f_\delta(r)$ funksiyaning Fure koeffitsentlari.

Endi $u_{n\delta}(r,z)$ *va* $u(r,z)$ lar orasidagi farqni baholaymiz.

$$\|u(r,z) - u_{n\delta}(r,z)\|_{L_2(0,R)} = \|B_n f_\delta(r) - u(r,z)\|_{L_2(0,R)} =$$

$$=\left\|B_n f_\delta(r)-u(r,z)+B_n f(r)-B_n f(r)\right\|_{L_2(0,R)}\le\left\|B_n\left[f_\delta(r)-f(r)\right]\right\|_{L_2(0,R)}+$$

$$+\left\|B_n f(r)-u(r,z)\right\|_{L_2(0,R)}\le\left\|B_n\right\|_{L_2(0,R)}\delta+\left\|B_n f(r)-u(r,z)\right\|_{L_2(0,R)}, \qquad (13)$$

bu yerda

$$u(r,z)=(z-b)\sum_{m=1}^{\infty}a_m e^{-\frac{\mu_m^{(0)}}{R}(z-b)}J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r\right)$$

(1)-(5) masalaning aniq echimi.

(13)-(14) tengliklardan

$$\left\|B_n\right\|_{L_2(0,R)}=e^{\frac{2\mu_n^{(0)}}{R}(z-b)}\left|z-b\right| \qquad (14)$$

$$\left\|B_n f(z)-u(r,z)\right\|^2_{L_2(0,R)}=(z-b)^2\sum_{m=n+1}^{\infty}a_m^2 e^{-\frac{2\mu_m^{(0)}}{R}(z-b)} \qquad (15)$$

Bu yerda (11) funksionalni

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_m^2 e^{-\frac{2\mu_m^{(0)}}{R}b}\le\left(\frac{M}{b}\right)^2 \qquad (16)$$

shart ostida shartli maksimumga tekshiramiz. Buning uchun

$$\overline{L}\left(a_m,\lambda,\mu,\right)=(z-b)^2\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2 e^{-\frac{2\mu_m^{(0)}}{R}(z-b)}+\lambda\left[\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2 e^{\frac{2\mu_m^{(0)}}{R}b}-\left(\frac{M}{b}\right)^2\right]+\mu\left[\sum_{m=1}^{\infty}a_m{}^2-\varepsilon^2\right]$$

Lagranj funksiyasini tuzib, bu funksiyaning a_k,λ argumentlari bo‘yicha xususiy hosilalarini nolga tenglaymiz.

$$\frac{\partial L}{\partial a_m}=2a_m(z-b)^2 e^{\frac{2\mu_m^{(0)}}{R}b}=0, \qquad m=\overline{1..n}$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_m}=2a_m\left((z-b)^2 e^{-\frac{2\mu_m^{(0)}}{R}(z-b)}+\lambda e^{\frac{2\mu_m^{(0)}}{R}b}\right)=0, \quad \overline{m=n+1,\infty}$$

$$\frac{\partial\overline{L}}{\partial\lambda}=\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2 e^{\frac{2\mu_m^{(0)}}{R}b}-\left(\frac{M}{b}\right)^2=0$$

Bu tenglikdan (15) funksional $a_m = 0, \quad m \neq n+1, \; a_{n+1} = \frac{M}{b} e^{-\frac{\mu_{n+1}^{(0)}}{R} z}$ bo‘lganda shartli maksimumga erishishi kelib chiqadi.

Demak,

$$\left\| B_n f(z) - u(\rho, z) \right\|_{L_2(0,a)} \leq \left| z - b \right| \frac{M}{b} e^{-\frac{\mu_{n+1}^{(0)}}{a} z} \tag{17}$$

(13), (14), (27) munosabatlardan foydalanib,

$$\left\| u(\rho, z) - u_{n\delta}(\rho, z) \right\|_{L_2(0,a)} \leq \omega(n, M, \delta) \tag{18}$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz.

$$\omega(n, M, \delta) = \left[e^{-\frac{\mu_m^{(0)}}{R}(z-b)} \delta + \frac{M}{b} e^{-\frac{\mu_{n+1}^{(0)}}{R} b} \right] \left| z - b \right| \tag{19}$$

Regulyarizatsiya parametri n sifatida $n = \left[n(\delta) \right] + 1$ qiymatni olish mumkin. Bu yerda $n\left(\delta\right) = \inf_n \omega(n, M, \delta)$

Shunday qilib, $L_2\left(0, R\right)$ da (1) - (5) masala to‘la tekshirildi.

5. Xulosa. Yuqori yarim chegaralangan silindrda bigarmonik tenglama uchun ichki chegaraviy masala qo‘yilib, qo‘yilgan masala yechimining turg‘un emasligini ko‘rsatuvchi misol qurilgan, ya’ni masalaning klassik ma’noda nokorrekt ekanligi ko‘rsatilgan. So‘ngra bu masalaning shartli korrektlikka tekshirilgan hamda korrektlik to‘plamining yuqori chegarasi berilgan holda regulyarizatsiya usuli yordamida masalaning aniq yechimga intiluvchi taqribiy yechimi qurilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Атаходжаев М.А. Некорректный задачи для бигармонического уравнения. Т. 1986 г.
2. Ахмедов З.А. О некоторых некорректных задачах для бигармонического уравнения. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ- мат. наук. Т., 1983г.
3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных ороизводных. М. Наука, 1981.
4. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск. 1962г.

5. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи для дифференциалных уравнений. Новосибирск. 1981г.

6. Салоҳиддинов М.Ҳ. Математик физика тенгламалари. - Тошкент: Ўзбекистон, 2002.

7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.М. Наука. 1974г.

8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.М. Наука. 1979г.

9. Мамедов Я.Н О некоторых задачах на собственные значения для уравнения смешанного типа. // Дифференциальные уравнения. 1990, т. XXVI. №1, с. 163-167.

10. Пономарёв С.М. Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева-Бицадзе. Дис…докт. физ.-мат. наук. - М. 1981.

11. Сабитов К.Б., Хасанова С.Л Решение задачи Трикоми-Неймана для уравнения Лаврентьева-Бицадзе методом спектрального анализа. // Изв. КБНЦ РАН, Математика. 2002. №1, с.84-93

12. Расулов, Р., Сатторов, А., & Махкамова, Д. (2022). Вычисленние Квадрат Нормы Функционала Погрошности Улучшенных Квадратурных Формул В Пространстве. Central asian journal of mathematical theory and computer sciences, 3(4), 114-122.

13. Rashidjon, R., & Sattorov, A. (2021). Optimal Quadrature Formulas with Derivatives in the Space. Middle European Scientific Bulletin, 18, 233-241.

14. Rasulov, R. ., Sattorov, A. ., & Mahkamova, D. T. . (2022). View of the Derivative Quadrature Formula Norm in Space . Modern Journal of Social Sciences and Humanities, 10, 70–75.