МАСАЛАЛАРНИ МОДЕЛЛАШТИРИШ МЕТОДИДА ЁРДАМИДА ЕЧИШ ЙЎЛЛАРИ.

Ш.З.Қурбонов
Тошкент кимё-технология институти Шаҳрисабз филиали мустақил изланувчиси

Калит сўзлар *математик модели, дифференциал тенглама, математик модели, тенглама, хусусий ҳосила, функция.*

Key words: *mathematical model, differential equation, mathematical model, equation, special derivative, function.*

Ключевые слова: *математическая модель, дифференциальное уравнение, математическая модель, уравнение, специальная производная, функция.*

Аннотация: *Ушбу маыолада масалаларни лойиҳалаштириш ва татқиқ этишни турли моделларда ечиш усуллари орқали амалга оширишни аниқ масалалар ёрдамида қараб чиқилган.*

Abstract: *In this thesis, the implementation of problem design and research through the methods of solving different models is considered with the help of concrete problems.*

Аннотация: *В данной дипломной работе рассматривается реализация проектирования и исследования задач посредством методов решения различных моделей с помощью конкретных задач.*

Совутишнинг Нютонь модели. Кундалик ҳаётимизда совутиш (иситиш) ҳодисасига жуда кўп дуч келамиз. Қандайдир жисмни совутиш (иситиш) учун, температураси жисм температурасидан паст (юқори) муҳитга туширамиз. Муҳит вазифасини ҳаво, катта совуқ ванна, қиздирилган печка ва бошқалар, жисм вазифасини эса термометр, иссиқ металл пластина ва бошқа нарсалар бажариши мумкин.

Резервуарга жисм ботирилганда унинг температураси T ўзгаришини эътиборга олмаймиз $T = const$ ёки T ни вақт бўйича берилган функция деб ҳисоблаймиз яъни $T(t)$. Ботирилган жисм температураси τ унинг барча қисмида ҳар бир вақт моментида бир хил деб фараз қиламиз, $\tau = \tau(t)$. У ҳолда бизга маълум бўлган Нютоннинг совутиш қонуни, қуйидагидан иборат: тезликнинг ўзгариш тезлиги температуралар айирмаси $T - \tau$ га пропорционал. Нютоннинг совутиш қонуни қуйидаги биринчи тартибли оддий дифференциал тенглама кўринишида ёзилиши мумкин:

$$\frac{d\tau}{dt} = k(T - \tau)$$

бу ерда kботирилган жисм таркибига ва ўраб турган муҳит хоссасига боғлиқ бўлган мусбат константа.

Эритма концентрацияси ҳақидаги масала ўзгарувчиларга ажраладиган дифференциал тенгламалар ёрдамида ифодаланиб, сўнг ечилади10 литрли идишдаги сувга узлуксиз равишда минутига 3 литр тезлик билан цемент эритмаси келиб қўшилмоқда, бир литр цемент аралашмасида 0,2кг цемент бор. Бу эритма идишдаги сув билан бир жинсли аралашма кўринишига келгунича аралаштирилади. Ҳосил бўлган эритма идишдан қандай тезликда қуйилган бўлса шу тезликда оқиб чиқмоқда. 3 минуту 20 секунддан кейин идишда цементнинг массаси (г) қанча бўлади?

1.**Математик модель.**

Мазкур масалада талабалар тезда изланадиган функцияни ва ўзгарувчини аниқлашади: $y(t)$ −тажриба бошлангандан t минутдан кейин идишдаги цемент миқдори−изланаётган функция, t −мос равишда ўзгарувчи.

Доимий ўзгарувчан жараён учун математик моделни ифодалаш мураккаброқдир. Ўқитувчи бундай кўринишдаги масалалар учун, жараённи

етарлича кичик вақт оралиғи Δt да дастлаб қараш лозимлигини тушунтиради. У ҳолда талаба Δt вақтда келиб қўшилаётган цемент ва шу вақтда оқиб чиқаётган цемент миқдорини келтириб чиқаради, яъни қуйидаги тенгламани олади:

$$y(t+\Delta t) - y(t) = 0{,}6\Delta t - 0{,}3\Delta t[y(t)+\alpha].$$

Бу тенгликни иккала томонини Δt га бўлиб, $\Delta t \to 0$ да лимитга ўтадиган бўлсак, масаланинг математик модели бўлган тенглама ҳосил бўлади:

$$y' = 0{,}6 - 0{,}3y(t).$$

Бошланғич шарт $y(0)=0$, чунки $t=0$ да идишда цемент йўқ эди.

2.**Ечиш.**

Талабалар учун бу тенгламани (ўзгарувчиларга ажратиб) ечиш унчалик қийинчилик туғдирмайди. Тенгламани умумий ечим:

$$y = 2 - Ce^{-0{,}3t}$$

кўринишда бўлади. Шундан сўнг Коши масаласи ечилади:

$y(0)=0$ да $y(0) = 2 - C, \quad C = 2$ бундан:

$$y(t) = 2 - 2Ce^{-0{,}3t}$$

хусусий ечимни ҳосил қиламиз. Аниқ берилганларни вақтнинг аниқ шартига қўйиб, керакли натижага эга бўламиз.

Агар $t=3$ бўлса, у ҳолда идишда

$$y\left(3\frac{1}{3}\right) = 2 - 2e^{-1} \approx 1{,}26kg$$

цемент бўлади.

Жавоб. 3 минут 20 секунддан сўнг идишда 1,26 кг цемент бўлади.

Масала: $V_0 = 0{,}1м^3$ ҳажмли цилиндрик идишда атмосфера босимли ҳаво сақланмоқда, у адиабатик (атроф билан иссиқлик алмашиниш йўқ) равишда $V_0 = 0{,}1м^3$ ҳажмгача сиқилади. Сиқилиш ишини ҳисобланг?

Эчиш:

Адиабатик ўзгаришларда газ ҳолати, унинг босими ва ҳажми Пуассон тенгламаси билан боғланган:

$$P = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^k \cdot P_0$$

k −мазкур газ учун ўзгармас катталик. Ҳаво учун у $k \approx 1{,}4$. Атмосфера босими $P_0 = 10330\frac{н}{м^2}$.

Фараз қилайлик, S −поршень юзаси; V −газ хажми; P −газ босими; $-dx$−ҳавони сиқишдаги поршеннинг чексиз кичик қиймати; dW −чексиз кичик бажарилган иш; $-dV$ −ҳажмнинг чексиз кичик ўзгариши; P_0−газнинг дастлабки босими; V_0−газнинг дастлабки ҳажми бўлсин.

$dW = -PSdx$ поршень туширилганда чексиз кичик бажарилган иш.

Лекин, $Sdx = dV$ бўлганлиги сабабли $dW = -PdV$ Пуассон тенгламасига кўра, қуйидагига эгамиз:

$$(P = P_0) = \frac{P_0}{V^k} V_0^k$$

жараённинг қуйидаги дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$dW = -V_0^k P_0 \frac{dV}{V^k}.$$

Бу тенгламани интеграллаб, қуйидаги умумий ечимга эга бўламиз:

$$W = \frac{V_0^k P_0}{(k-1)\cdot V^{k-1}}$$

Суюқликлар динамикаси. Суюқликлар динамикасининг фундаментал математик модели қуйидаги сиқиладиган суюқликни (газни) ифодаловчи, биринчи тартибли хусусий ҳосилали чизиқли бўлмаган дифференциал тенгламалар системасидан иборат:

$$\rho_t + \vartheta \cdot \nabla p + \rho div V = 0; \quad \rho\left[\vartheta_t + (\vartheta \cdot \nabla)V\right] + \nabla p = 0, \quad p_t + \vartheta \cdot \nabla p + A(p;\rho) div V = 0,$$

$A(p;\rho)$ −ихтиёрий функция ва у $S(t)$ энтропия билан тенглама боғлиқ.

$$S(t) = \rho \frac{\frac{\partial S}{\partial \rho}}{\frac{\partial S}{\partial p}}$$

Тезлик ϑ, босим p ва зичлик ρ−эрксиз ўзгарувчилар ролини бажаради. Эркли ўзгарувчилар бўлиб, t вақт ва нуқтанинг фазодаги $X = (x, y, z)$ координаталари хизмат қилади.

Агар суюқликнинг энтропияси доимий $S = const$ бўлса, у ҳолда суюқликни изентропик деб аталади.

Функциянинг политроп оқими ҳолатида тенглик $S(t) = \gamma \cdot p$ кўринишни олади, бу ерда γ −ўзгармас бўлиб, адиабатик (политроп) экспонента деб аталади. $\gamma = 5/3$ ҳол бир атомли газ оқимига мос келади. Бу ҳол муҳим, чунки, хусусан қуёш атрофи асосан бир атомли газлардан иборатдир.

Шундай қилиб, бир атомли газлар қуйидаги тенгламалар билан ифодаланади:

$$\rho_t + \vartheta \cdot \nabla p + \rho div V = 0; \quad \rho[\vartheta_t + (\vartheta \cdot \nabla)V] + \nabla p = 0, \quad p_t + \vartheta \cdot \nabla p + \frac{5}{3} p\, div V = 0$$

Бошқа муҳим физик ҳолат адиабатик экспонента $\gamma = 2$ га тенг текис изентропик газ оқимига мос келади (яъни $S = const$). Изоэнтропик оқим шарти газодинамиканинг тенгламасидан охирги тенгламани ташлаб юбориш имкониятини беради. У ҳолда, $p = 1, \quad \rho = gh$ бу ерда g −гравитацион тезланиш, биз биринчи иккита тенгламани қуйидаги системага келтирамиз:

$$h_t + \vartheta \cdot \nabla h + h div V = 0; \quad [\vartheta_t + (\vartheta \cdot \nabla)V] + g\nabla h = 0$$

Бу ерда V −икки ўлчовли вектор ва ∇− Гамилтоноператори, $\nabla_{x,y}$ −унинг компоненталари. Тенгламалар саёз сув шартида оқимни ифодалайди, бу ерда ($x; y$)− қаттиқ асосли текислик координатаси, h − асосдан сув сиртигача бўлган баландлик.

Потенциал текис барқарор бўлмаган товуш тезлигига яқин тезлик билан оқаётган газ оқимининг тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$2u_{tx} + u_x u_{xx} - u_{yy} = 0$$

Наве−Стокс тенгламалари. Сиқилмайдиган қовушқоқ суюқликлар оқими қуйидаги кўринишдаги Наве−Стокс тенгламаларига бўй сунади:

$$V_t + (V \cdot \nabla)V + = \vartheta \Delta V, \quad div V = 0.$$

$V = (v^1, v^2, v^3)$ − ва p −босим эрксиз ўзгарувчилар ҳисобланади, ρ −зичлик фаразга кўра берилган ўзгармасдир. v −параметр суюқликнинг қовушқоқлиги билан аниқланади.

Газни тозалаш ҳақидаги масала. Газни олтингугурт ва водород аралашмасидан тозалаш учун уни скруббер (у ёки бу таркибни тўпловчи идиш) орқали ўтказишади. Аппаратнинг барқарор тартибда ишлаб, ютгичнинг ингичка қатлами орқали ютиладиган газ аралашмасининг миқдори аралашма концентрациясига ҳамда қатламнинг кўндаланг кесимига пропорционал. Скруббер асосининг радиуси R, баландлиги H бўлган конус шаклидадир. Газ конус тепасидан келиб тушади. Агар олтингугурт ва водород аралашмаси концентрацияси келиб тушаётган газда $a\%$, чиқаётганида $b\%$ га тенг бўлса, скруббердаги олтингугурт ва водород аралашмаси концентрациясининг конус баландлигидан қатламгача бўлган масофани функция сифатида боғлиқлигини топинг. Масаланинг математик модели яъни дифференциал тенгламасининг кўриниши қуйидагича:

$$dq = kq \cdot \pi \left(\frac{R^2}{H^2} \right) h^2 dh.$$

Жавоб. Изланаётган концентрациянинг h масофага ва конус баландлигига боғлиқлиги қуйидаги кўринишда бўлади:

$$q = exp\{k\pi R^2\} \frac{h^3}{3H^2}.$$

Амалий машғулотларда ва мустақил ишларда умумтехника мазмунидаги масалалардан фойдаланилади: механик, физик ва бошқалар. Масалан, жисмнинг совуши ҳақидаги масала (иссиқлик техникаси). Очиқ ҳаводa жисмнинг совуш тезлиги, жисм температураси билан ҳаво температураси айирмасига пропорционал. Агар ҳавонинг $20^0 C$ли температурасида, 20 минутда жисм $100^0 C$ дан $60^0 C$гача совуса, унинг температураси $30^0 C$ гача тушиши учун қанча вақт талаб этилади?

Тенгламанинг математик модели:

$-\frac{d\tau}{dt} = k(\tau - 20)$ −ўзгарувчиларга ажраладиган тенглама.

Газни ионлаштириш ҳақидаги масала. Газ мавжуд муҳитни доимий нурлантириш ҳисобига ионлаштириш жараёни бўлиб ўтади. Унда 1 секундда берилган газ ҳажмида q мусбат ва манфий ионлар ташкил топади. Натижада мусбат ва манфий ионлар яна ўзаро қўшилади (ионлар рекомбинацияси) ва уларнинг сони камаяди. Умумий n сондан ҳар бир секундда мусбат ионлардан бир қисми, уларни сонининг квадрати пропорционал (пропорционаллик коэффициенти $\alpha = const$, газнинг ҳолати ва табиатига боғлиқ) қисмига қўшилишини ҳисобга олиб, $н$ ионлар сонини t вақтга боғлиқлигини топинг.

Бу масала учун математик моделни тузишни қараб чиқамиз.Ўқитувчи талабалар диққатини вақт ўзгариши билан, ионларни ташкил топиши ҳам ўзгаришига қаратиб, функция ва аргументни аниқлашни таклиф қилади. Шу билан бирга ўқитувчи, кичик вақт оралиғида нотекис ўтадиган жараёнларни текис деб қаралишини тушунтириб ўтади. Талабалар, масалаларни ечиш тажрибаларига таяниб, етарлича кичик вақт оралиғида жараённи моделлаштириш кераклигини билишади, газ муҳитида ҳар dt секундда dn ионлармавжуд бўлади, ҳар бир секундда мусбат ионлар $q \cdot dn$ ионлаштирилади ва масала шартига кўра an^2dt рекомбинациялашади. Бирлик вақт ичида ионларнинг умумий сонини ифодаловчи, ионлаштирилган ва рекомбинациялашган ионлар сони орқали математик моделни ёзишади: $dn = qdt - \alpha n^2 dt.$ $t = 0$ да $n = 0$ бошланғич шартлар.

Амалиёт машғулотларидаги масалалар тўпламига ўзгартириш киритиш ҳақидаги кейинги таклифимиз − махсус танланган масалаларни эчиш учун, талабалар диққатини қаралаётган ҳолатга математикани татбиқ қилишни кучайтиришдир. Ҳолат-ҳодисага математикани татбиқ қилишга талабаларни ўргатиш, бевосита математик моделлаштириш методини қўллаш билан боғлиқдир.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. Turdiyev S. H. R. MODELLAR XARAKTERI VA MODELLASHTIRISH JARAYONLARINING TARKIBIY QISMLARI //E Conference Zone. – 2022. – С. 136

2. Турдиев Ш. Р. STEAM ФАНЛАР ТАЪЛИМИ ВА ИНТЕГРАЦИЯСИНИ ЮЗАГА КЕЛИШИ МОДЕЛИ //Academic research in educational sciences. – 2022. – Т. 3. – №. 4. – С. 571-575.

3. Чоршанбиев З. Э. Дифференцированное обучение студентов на занятиях высшей математики в техническом вузе //Academy. – 2021. – №. 4 (67). – С. 42-47.

4. ТУРДИЕВ, Ш. STAEM ФАНЛАРИНИ ТАДҚИҚ ЭТИШДА, STEAM ТАЪЛИМ МЕТОДИКАСИ. http://science. nuu. uz/uzmu. php..

5. Chorshanbiyev, Z. E. "The pedagogical potential of e-learning environments to improve mathematical and scientific training of engineering personnel." European Journal of Research and Reflection in Educational Sciences Vol 7.1 (2019).

6. Sh.Z. Kurbanov (2023) STEAM EDUCATIONAL PROGRAMS IN IMPLEMENTATION OF INDEPENDENT EDUCATION OF STUDENTS IN THE MODULE CREDIT SYSTEM //American Journal of Technology and Applied Sciences Volume 10, March, 2023, 7-10.