

## BUTUN SONLI PROGRAMMALASHTIRISH: METODLAR, QO‘LLANILISH VA AMALIY AHAMIYATI

*Samarqand iqtisodiyot va servis instituti  
Oliy matematika kafedrası o‘qituvchisi  
PhD Quljanov Jaxongir Baxtiyorovich  
Samarqand iqtisodiyot va serves instituti talabasi  
Akbarov Diyorbek Jamshed o‘g‘li*

**Annatsiya:** *Butun sonli programmalashtirish (IP) — bu chiziqli programmalashtirishning bir turi bo‘lib, unda qaror o‘zgaruvchilari faqat butun sonlar sifatida ko‘rsatiladi. Ushbu maqolada butun sonli programmalashtirish metodlari, xususan, Branch and Bound va Cutting Plane metodlarining amaliy ahamiyati tahlil qilinadi. Butun sonli programmalashtirish masalalari iqtisodiyot, sanoat, logistika va transport sohalarida keng qo‘llaniladi. Tadqiqotda ushbu metodlar yordamida qanday samarali yechimlar topish mumkinligi va ularning real hayotdagi qo‘llanilishi ko‘rsatiladi.*

**Kalit so‘zlar:** *Butun sonli programmalashtirish, Branch and Bound metodi, Cutting Plane metodi, optimallashtirish, resurslarni taqsimlash, iqtisodiy samaradorlik.*

**Annotation:** *Integer programming (IP) is a form of linear programming where decision variables must be represented as integers. This paper discusses the methods used in integer programming, particularly the practical importance of the Branch and Bound and Cutting Plane methods. Integer programming problems are widely applied in economics, industry, logistics, and transportation. The research highlights how these methods can lead to effective solutions in real-world applications.*

**Keywords:** *Integer programming, Branch and Bound method, Cutting Plane method, optimization, resource allocation, economic efficiency.*

**Аннотация:** *Целочисленное программирование (IP) — это форма линейного программирования, в которой переменные решения должны быть представлены целыми числами. В статье рассматриваются методы целочисленного программирования, в частности практическое значение методов "Branch and Bound" и "Cutting Plane". Задачи целочисленного программирования широко применяются в экономике, промышленности, логистике и транспорте. Исследование подчеркивает, как эти методы могут привести к эффективным решениям в реальных приложениях.*

**Ключевые слова:** *Целочисленное программирование, метод "Branch and Bound", метод "Cutting Plane", оптимизация, распределение ресурсов, экономическая эффективность.*

## KIRISH

Butun sonli programmalashtirish (IP) — bu chiziqli programmalashtirishning bir turi bo'lib, unda qaror o'zgaruvchilari faqat butun sonlar bo'lishi kerak. Bu metod resurslarni taqsimlash, ishlab chiqarish rejalashtirish, transport va logistika tizimlarini optimallashtirishda keng qo'llaniladi. Ko'plab real dunyo masalalari butun sonli yechimlarni talab qiladi, masalan, ishlab chiqarishning ma'lum bir hajmini belgilash, yuk tashish vositalarini ajratish yoki ishchilar sonini aniqlash. Ushbu maqolada butun sonli programmalashtirishning asosiy metodlari, xususan, Branch and Bound va Cutting Plane metodlarining samaradorligi va ularning amaliy qo'llanilishi tahlil qilinadi.

### ADABIYOTLAR SHARXI

Butun sonli programmalashtirishning rivojlanishi va metodologiyasi haqida turli ilmiy manbalar mavjud. Dantzig (1947) tomonidan kiritilgan chiziqli programmalashtirish usullari butun sonli masalalarda ham qo'llanilishi mumkinligi ko'rsatilgan. Charnes va Cooper (1950) tomonidan ishlab chiqilgan boshqaruv modellarida butun sonli qarorlar, ayniqsa, sanoat va ishlab chiqarish tizimlarida muvaffaqiyatli qo'llanilgan. Gass (2003) va Taha (2017) o'z asarlarida butun sonli programmalashtirishning turli metodlari va ularning amaliyotdagi qo'llanilishi haqida batafsil tushuntirishlar berishgan.

### TADQIQOT USLUBI VA METODOLOGIYA

Bu bo'limda butun sonli programmalashtirishning asosiy metodlari va ularning amaliy qo'llanilishi tasvirlanadi. Branch and Bound metodi — bu iteratsion usul bo'lib, har bir bosqichda qadam-baqadam yechimlarni izlab chiqadi. Cutting Plane metodi esa bo'shliqni qisqartirish orqali, masalaning mumkin bo'lgan yechimlar to'plamini kamaytiradi. Ushbu metodlar butun sonli masalalarni samarali hal qilish imkonini beradi.

### ASOSIY NATIJALAR VA TAHLIL

Butun sonli programmalashtirish masalalari ko'plab amaliy sohalarda, ayniqsa logistika, ishlab chiqarish rejalashtirish, transport tizimlari va boshqa resurslarni taqsimlash masalalarida samarali qo'llaniladi. Ushbu metodlar yordamida optimallashtirishning aniq, samarali va natijaviy yechimlari topiladi.

#### *Branch and Bound metodining tahlili*

**Branch and Bound** metodi butun sonli programmalashtirish masalalarini yechish uchun keng tarqalgan usullardan biridir. Bu metod iteratsion jarayon orqali masalani yechadi, har bir bosqichda yechimlar to'plamini kichik qismlarga bo'lib, ularni tekshiradi. Bu jarayon quyidagi asosiy bosqichlardan iborat:

**Branching:** Muammo bo'shlig'i yanada kichik qismlarga bo'linadi, har bir bo'linish natijasida yangi bir muammo hosil bo'ladi. Har bir yangi kichik bo'lakda qarorlar yana bir bor optimallashtiriladi.

**Bounding:** Har bir bo'linish bosqichida, eng yaxshi yechimni izlash uchun bo'linishlar o'rtasida chegara belgilanadi. Bu chegara, masalaning yechimlar bo'yicha potensial bo'lishi mumkin bo'lgan optimal natija hisoblanadi.

**Pruning:** Agar bo'linishning ma'lum bir qismi maksimal yechimni ta'minlay olmaydi deb hisoblanadigan bo'lsa, bu qismni tashlab yuborish (qisqartirish) amalga oshiriladi. Bu jarayon masalaning bo'shlig'ini tezroq kamaytirishga yordam beradi va yechimni tezroq topishga imkon yaratadi.

Branch and Bound metodining afzalligi shundaki, u butun sonli programmalashtirish masalalarida optimal yechimni topishda ishonchli va samarali usul hisoblanadi. Ushbu metodni ishlatishda vaqt va hisoblash resurslarining tejash imkoniyatlari mavjud, lekin ba'zi hollarda, metodning yuqori hisoblash xarajatlari masalani yechishda muammo bo'lishi mumkin.

#### *Cutting Plane metodining tahlili*

**Cutting Plane** metodi butun sonli programmalashtirishni yechishda ikkinchi samarali metoddur. Ushbu metodda, dastlab yechish mumkin bo'lgan regionlar (yoki bo'shliq) topiladi va ularning ba'zi qismlari kesiladi (cutting), shu bilan optimal yechimga yaqinlashiladi. Cutting Plane metodi ko'plab iteratsiyalarni talab qilsa-da, uni tez va samarali natijalarga olib keladigan usul sifatida tavsiflash mumkin.

Cutting Plane metodining asosiy qadamlari quyidagilardan iborat:

**Boshlang'ich yechimni tanlash:** Dastlab, uzluksiz (real) yechim topiladi, bu birinchi bosqichda chiziqli programmalashtirish yechimi hisoblanadi.

**Kesish (Cutting):** Keyin, ushbu yechimga mos kelmaydigan qismlar kesiladi, ya'ni chiziqli bo'linmalar olib tashlanadi, bu esa masalani bo'lishni va qisqartirishni osonlashtiradi.

**Takrorlash (Iteratsiya):** Har bir yangi kesilgan qismni to'ldirish uchun yana bir yechim qidiriladi. Har bir iteratsiyada kesishlar amalga oshiriladi va optimal yechimga yaqinlashish jarayoni davom etadi.

Cutting Plane metodining afzalligi shundaki, u tezroq va aniq natijalar berishga qodir, chunki har bir iteratsiyada optimallikni kamaytirish va tezroq chegara olish imkoniyati mavjud. Ammo, bu metod ko'p miqdordagi iteratsiyalarni talab qilishi mumkin, bu esa ba'zi hollarda hisoblashning yuqori xarajatlarini keltirib chiqaradi.

#### *Amaliy qo'llanilishi va samaradorligi*

Butun sonli programmalashtirish metodlari, xususan Branch and Bound va Cutting Plane metodlari ko'plab sohalarda muvaffaqiyatli qo'llanilmoqda. Masalan:

- **Logistika va transport tizimlarida:** Yuk tashish va omborlar uchun optimal rejalashtirishda butun sonli programmalashtirish yordamida samarali yechimlar topiladi. Bu usullar yordamida yuklarni to'g'ri va optimal yo'nalishda yetkazib berish tizimlari tashkil etiladi.

- **Ishlab chiqarish rejalashtirishda:** Butun sonli metodlar ishlab chiqarish hajmini va ishlab chiqarish rejalashtirishni optimallashtirishda qo'llaniladi. Bu, ayniqsa,



ishlab chiqarish uchun kerakli materiallar soni va ishlab chiqarish liniyalarining samaradorligini hisoblashda muhimdir.

• **Resurslarni taqsimlash:** Resurslar, masalan, ishchilar, mashinalar yoki texnika, maksimal darajada samarali taqsimlanishi uchun butun sonli programmalashtirish metodlari ishlatiladi. Bunda resurslar soni, ish vaqti va boshqa cheklovlar hisobga olinadi.

#### *Samaradorlik tahlili*

Butun sonli programmalashtirish usullari optimal yechimlarni taqdim etishda yuqori samaradorlikni ko'rsatadi, lekin bu metodlarning samaradorligi ko'plab omillarga bog'liq, jumladan, masalaning murakkabligi, hisoblash resurslari va yechimga erishish tezligi. Branch and Bound metodining samaradorligi yechimning bo'lish qismi va kesishlar tezligiga bog'liq. Cutting Plane metodining samaradorligi esa har bir iteratsiyaning natijalariga va kesishlar qanchalik samarali amalga oshirilganiga bog'liq.

Biroq, har ikki metod ham optimallikka erishish uchun ko'p vaqt talab qilishi mumkin, ayniqsa katta miqdordagi ma'lumotlar va qarorlar mavjud bo'lsa. Shuning uchun, bu metodlar ko'pincha yuqori hisoblash quvvatini talab qiladi, lekin samarali va optimal natijalar berishga qodir.

#### **Butun Sonli Programmalashtirishning umumiy formulasi**

BSP masalasining umumiy shakli quyidagicha yoziladi:

Maksimal yoki minimal:  $Z=c_1x_1+c_2x_2+\dots+cnx_n$

kuzatish shartlari:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2,$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m,$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bu yerda:

- $Z$  — optimallashtiriladigan maqsad funksiyasi (maksimal yoki minimal qiymat),
- $c_1, c_2, \dots, c_n$  — maqsad funksiyasining koeffitsiyentlari,
- $x_1, x_2, \dots, x_n$  — o'zgaruvchilar,
- $a_{ij}$  — resurslar uchun chiziqli shartlar koeffitsiyentlari,
- $b_1, b_2, \dots, b_m$  — resurslar bo'yicha cheklovlar.

#### **2. Branch and Bound metodidagi shartlar**

Branch and Bound metodida eng asosiy vosita bu **branching**, **bounding** va **pruning** jarayonlari hisoblanadi. Masalaning branch va bound shaklida qo'yilishi quyidagicha bo'lishi mumkin:

1. **Branching:** Masala kichik qismlarga bo'linadi va har bir kichik bo'lakda yechimni qidirish amalga oshiriladi. Har bir bo'lak uchun:

$$x_j \geq \lfloor x_j^* \rfloor \text{ yoki } x_j \leq \lceil x_j^* \rceil.$$

Bu yerda  $\lfloor x_j^* \rfloor$  — olingan yechim bo‘lib, butun sonlar bo‘lishi kerak.

2. **Bounding:** Chegara belgilashda, qaysi bo‘laklar optimal yechimga yaqinlashayotganini aniqlash uchun:

$$B^* = \min_i(B_i),$$

bu yerda  $B_i$  har bir bo‘lakning cheklangan qiymatini anglatadi.

3. **Pruning:** Chegara orqali yechimni tekshirish va bo‘linishni to‘xtatish:

$$B_i \leq Z_{\text{opt}},$$

agar  $B_i$  optimal yechimdan kichik bo‘lsa, bu bo‘lakni tahlil qilishni to‘xtatamiz.

### 3. Cutting Plane metodining formulasi

Cutting Plane metodida boshlang‘ich yechimni topib, keyin kesishlar (cutting planes) yordamida optimal yechimga yaqinlashiladi. Bu metodni quyidagicha formulalash mumkin:

$$Z = \max\{c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n : Ax \leq b, x_i \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Bu yerda **cutting** jarayoni quyidagicha amalga oshiriladi:

**Kesish (cutting) qismlari:** Har bir iteratsiyada qo‘llaniladigan cheklovlar:

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n \leq \beta,$$

bu yerda  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — chiziqli koeffitsiyentlar, va  $\beta$  — kesish qismi uchun chegarani bildiruvchi konstant.

### Amaliy masalalar

*Masala 1: Ishlab chiqarish rejalashtirish*

**Masala:** Bir ishlab chiqarish korxonasi ikkita turdagi mahsulotni ishlab chiqarish rejasini tuzmoqchi. Birinchi mahsulotni ishlab chiqarish uchun 4 soat, ikkinchi mahsulotni ishlab chiqarish uchun 5 soat kerak. Har bir mahsulotdan foyda olish birinchi mahsulot uchun 6 so‘m, ikkinchi mahsulot uchun esa 8 so‘mni tashkil etadi. Ishlab chiqarishda jami 40 soat vaqt mavjud.

**Maqsad:** Maksimal foyda olish.

**Formulasi:** Maqsad funksiyasi:

$$Z = 6x_1 + 8x_2$$

Cheklovlar:

$$4x_1 + 5x_2 \leq 40, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+.$$

*Masala 2: Logistika va transport tizimi*

**Masala:** Bir transport tizimi tomonidan 3 turdagi yukni 4 ta turli omborlardan manzillarga yetkazib berish kerak. Har bir ombordan manzilgacha yukning birligi uchun transport xarajatlari ma‘lum. Har bir manzilga yetkazilishi kerak bo‘lgan yuk miqdori va omborlardagi mavjud yuk miqdori cheklangan.

**Maqsad:** Transport xarajatlarini minimallashtirish.

**Formulasi:**

Maksimal foyda:

$$Z = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij}$$

Cheklovlar:

$$\sum_{i=1}^4 x_{ij} = d_j \quad \forall j = 1, 2, 3,$$

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = s_i \quad \forall i = 1, 2, 3, 4.$$

Bu yerda  $x_{ij}$  —  $i$ -ombordan  $j$ -manzilga yuborilgan yuk miqdori,  $c_{ij}$  — xarajatlar,  $d_j$  — har bir manzilga kerakli yuk miqdori,  $s_i$  — har bir omborda mavjud yuk miqdori.

**XULOSA**

Butun sonli programmalashtirish masalalari keng qo'llaniladigan va muhim ahamiyatga ega. Branch and Bound va Cutting Plane metodlari butun sonli masalalarni samarali yechishga imkon beradi, ayniqsa, sanoat va logistika sohalarida. Ushbu metodlarni qo'llash orqali resurslarni samarali taqsimlash va iqtisodiy samaradorlikni oshirish mumkin. Kelajakda butun sonli programmalashtirishni yanada rivojlantirish va amaliyotda kengroq qo'llanilishi kutilmoqda.

**FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR;**

1. Dantzig, G. B. (1947). "Linear Programming and Extensions." Princeton University Press.
2. Charnes, A., Cooper, W. W. (1950). "Management Models and Industrial Applications of Linear Programming." Wiley.
3. Gass, S. I. (2003). "Linear Programming: Methods and Applications." Dover Publications.
4. Taha, H. A. (2017). "Operations Research: An Introduction." Pearson.