РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАТОРОВ С ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ В ЯДРАХ

Юспова Рохатой Жуманиязовна
Тошкент темир йул техникуми
Юнусова Зиеда Намазбаевна
Тошкент вилояти Чиноз тумани 2-сонли КНМ

Аннотация: *Ядросида Бессель функцияси қатнашган операторлар биринчи бўлиб ўтган асрнинг 80 йилларида М.С.Салоҳиддинов ва А.Қ.Ўриновнинг биргаликдаги ишларида киритилган бўлиб, бу операторлар математик физикадаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун қўйилган кўпгина чегаравий масалаларни ечишга муваффақиятли қўлланиб келинди. Кейинги пайтларда ечиш усуллари Салоҳиддинов-Ўринов операторлари хоссаларининг таъсир доирасидан ташқарида бўлган янги масалалар пайдо бўлди. Мазкур ишда Салоҳиддинов-Ўринов операторларини бирмунча умумлаштирадиган операторлар киритилади ва уларнинг хоссалари ўрганилади. Олинган натижалар Гельмгольц (телеграф) тенгламаси учун қўйилган Гурса масаласини ечишга қўлланилади. Айнан киритилган операторларнинг бу ишда исботланган хоссалари Гурса масаласининг ечимини ошкор ва келгуси тадқиқотлар қўллаш учун қулай бўлган кўринишда топиш имконини беради.*

Калит сўзлар: *Бессель функцияси, Салоҳиддинов-Ўринов операторлари, Гурса масаласи, Гельмгольц тенгламаси, телеграф тенгламаси, гипергеометрик функция.*

ВВЕДЕНИЕ

Во всем мире многие научные и практические исследования, проводимые в различных областях математике, в большинстве случаев, приводится к исследованию моделей задач математической биологии и газовой динамике. Исследование фундаментальных законов газовой динамики с помощью решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с особенностями в коэффициентах, особенно с операторами Бесселя, является актуальной задачей.

Пусть $a, b, n, M, N -$ некоторые действительные числа, причем $M < N < +\infty,\ a, b \in [M, N]$, а $f(x) -$ функция, определенная в (a,b).

Введем в рассмотрение операторы типа Бесселя:

$$A_{abx}^{n,\lambda}[f(x)] \equiv f(x) - \int_a^x f(t)\left(\frac{b-t}{b-x}\right)^n \frac{\partial}{\partial t} J_0\left[\lambda\sqrt{(x-b)(x-t)}\right]dt\,, \qquad (1)$$

$$B_{abx}^{n,\lambda}[f(x)] \equiv f(x) + \int_a^x f(t)\left(\frac{b-x}{b-t}\right)^{1-n} \frac{\partial}{\partial x} J_0\left[\lambda\sqrt{(b-t)(x-t)}\right]dt\,, \qquad (2)$$

где $J_k(z)-$ функция Бесселя первого рода порядка k, $\lambda-$ действительное или чисто мнимое постоянное число.

В настоящем сообщении при рассмотрении операторов (1) и (2) предположим, что $f(x) \in C(M,N) \cap L_1[M,N]$. При таких предположениях относительно функции $f(x)$ выражения $A_{abx}^{n,\lambda}[f(x)]$ и $B_{abx}^{n,\lambda}[f(x)]$ будут определены в (M,N) и принадлежат классу $C(M,N)$.

Отметим, что операторы (1) и (2) в частном случае $a=b$ введены и исследованы в совместных работах М.С.Салахитдинова и А.К.Уринова (см., например, [1]), а также успешно применялись к решению краевых задач для различных уравнений типа Гельмгольца [2-12]. Ниже будут изучены свойства этих операторов и задача Гурса для гиперболического уравнения со спектральным параметром.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Следующая теорема выражает основное свойство операторов (1) и (2).

Теорема 1. Если $f(x) \in C[m,N]$, то для любых $a,b \in [M,N]$ и $x \in (M,N)$ справедливы следующие равенства:

$$B_{abx}^{n,\lambda}\left\{A_{abx}^{n,\lambda}[f(x)]\right\} = f(x), \quad A_{abx}^{n,\lambda}\left\{B_{abx}^{n,\lambda}[f(x)]\right\} = f(x),$$

т.е. в классе непрерывных на $[M,N]$ функций операторы (1) и (2) являются взаимно обратными.

Доказательство. Подействовав на оператор $A_{abx}^{n,\lambda}[f(x)]$ оператором $B_{abx}^{n,\lambda}$ получаем:

$$B_{abx}^{n,\lambda}\left\{A_{abx}^{n,\lambda}[f(x)]\right\} = f(x) - (b-x)^{1-n}\int_0^x f(t)L(x,t;\lambda)(b-t)^n\,dt,$$

где

$$L(x,t;\lambda) = \frac{1}{b-x}\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\lambda\sqrt{(x-b)(x-t)}\right] - (b-t)\frac{\partial}{\partial x}J_0\left[\lambda\sqrt{(b-t)(x-t)}\right] +$$
$$+\int_t^x \frac{1}{b-s}\frac{\partial}{\partial x}J_0\left[\lambda\sqrt{(b-s)(x-s)}\right]\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\lambda\sqrt{(s-b)(s-t)}\right]ds.$$

После несложных преобразований выражению $L(x,t;\lambda)$ можно придать вид:

$$L(x,t;\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k+2}\frac{(x-t)^k(x-b)^k}{k!}F_k(x)\,,$$

где

$$F_k(x) = \sum_{i=0}^{k+1}\frac{(-1)^i}{i!(k-i+1)!}F(-k,k-i+1;k+1;z), \qquad z=(x-t)/(x-b).$$

Здесь $F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}z^n$ - гипергеометрическая функция Гаусса [13], а $(a)_n$ – символ Похгаммера [13]: $(a)_0=1,\ (a)_n=a(a+1)(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n-1),\ n=1,2,3,\ldots$.

Используя известные свойства гипергеометрических функций Гаусса $F(a,b;c;z)$ нетрудно показать, что $F_k(z)=0$ при любых z.

Отсюда следует, что оператор $B_{abx}^{n,\lambda}$ – обратный оператору $A_{abx}^{n,\lambda}$, т.е. справедливо первое из равенств теоремы 1.

Вторая часть теоремы 1 доказывается аналогично.

Теперь установим ряд тождеств необходимых при решении поставленной задачи.

Имеют место равенства

1. $\int_a^{\xi} J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-t)(\eta-t)}\right]A_{abt}^{1,\lambda}\left[f(t)\right]dt=\int_a^{\xi} J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-t)(\eta-b)}\right]f(t)dt.$

2. $A_{abx}^{1,\lambda}\left\{\frac{d}{dx}J_0\left[\lambda\sqrt{(x-a)(b-a)}\right]\right\}=(a-b)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2\overline{J}_1\left[\lambda\sqrt{(a-x)(b-x)}\right].$

3. $$\int_t^{\xi} J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-s)(\eta-b)}\right]\frac{\partial}{\partial s}J_0\left[\lambda\sqrt{(s-t)(b-a)}\right]ds=$$
$$=J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-t)(\eta-a)}\right]-J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-t)(\eta-b)}\right].$$

4. $$\int_a^{\xi} J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-s)(\eta-b)}\right]\frac{\partial}{\partial s}J_0\left[\lambda\sqrt{(s-a)(b-t)}\right]ds=$$
$$=J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-a)(\eta-t)}\right]-J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-a)(\eta-b)}\right].$$

5. $$\int_a^{\xi} J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-s)(\eta-b)}\right]\frac{d}{ds}J_0\left[\lambda\sqrt{(s-a)(b-a)}\right]ds=$$
$$=J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-a)(\eta-a)}\right]-J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-a)(\eta-b)}\right].$$

6. При $\beta<1$ и $x\in[a,b]$ справедливы равенства

$$\int_a^{x}(x-t)^{-\beta}\overline{J}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{(x-t)(b-t)}\right]f(t)dt=\Gamma(1-\beta)D_{ax}^{\beta-1}\left\{B_{abx}^{1,\lambda}[f(x)]\right\},$$

$$\int_x^{b}(t-x)^{-\beta}\overline{J}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{(t-x)(t-a)}\right]f(t)dt=\Gamma(1-\beta)D_{xb}^{\beta-1}\left\{B_{bax}^{1,\lambda}[f(x)]\right\},$$

где D_{ax}^{l} и D_{xb}^{l} — известные операторы интегрирования дробного порядка $l\ (l<0);\ \overline{J}_{\alpha}(z)=\Gamma(\alpha+1)(z/2)^{-\alpha}J_{\alpha}(z).$

Доказательство равенств 1-6 проводится разложением функций Бесселя в степенные ряды и сравнением коэффициентов.

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим известное уравнение Гельмгольца

$$u_{xx} - u_{yy} + \lambda^2 u = 0 \qquad (3)$$

в области Ω, ограниченной характеристиками уравнения (3) $ML: x+y=a$, $NL: x-y=b \ (a<b)$ при $y<0$ и отрезком $MN=\{(x,y): y=0,\ a<x<b\}$.

Задача Гурса. Найти определенное в замкнутой области $\overline{\Omega}$ регулярное решение уравнения (3), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{ML} = \psi_a(x),\ a \le x \le (a+b)/2, \qquad (4)$$

$$u|_{NL} = \psi_b(x),\ (a+b)/2 \le x \le b, \qquad (5)$$

где ψ_a, ψ_b – заданные функции, причем $\psi_a[(a+b)/2] = \psi_b[(a+b)/2]$.

В характеристических координатах $\xi = x+y$ и $\eta = x-y$ уравнение (3) переходит в уравнение

$$U_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\lambda^2 U = 0, \qquad (6)$$

область Ω преобразуется в треугольник Δ, ограниченный прямыми $\xi = a$, $\eta = b$ и $\eta = \xi$, а краевые условия (4) и (5) принимают вид

$$U|_{\xi=a} = \varphi_a(\eta),\ a \le \eta \le b, \qquad (7)$$

$$U|_{\eta=b} = \varphi_b(\xi),\ a \le \xi \le b, \qquad \varphi_a(b) = \varphi_b(a). \qquad (8)$$

Регулярное решение задачи Коши-Гурса для уравнения (6) в области Δ с условиями (7) и

$$\lim_{\eta\to\xi}\left(U_\xi - U_\eta\right) = \nu(\xi),\ 0<\xi<1 \qquad (9)$$

можно представить в виде

$$U(\xi,\eta) = \int_a^\xi J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-t)(\eta-t)}\right]\nu(t)dt + \varphi_a(a)J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-a)(\eta-a)}\right] +$$

$$+\int_a^\eta J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-a)(\eta-t)}\right]\varphi_a'(t)dt + \int_a^\xi J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-t)(\eta-a)}\right]\varphi_a'(t)dt. \qquad (10)$$

Теперь переходим к решению задачи Гурса (6)-(8). Полагая в формуле (10) $\eta = b$ и учитывая условие (8) получаем функциональное уравнение относительно $\nu(x)$ (здесь $x=\xi$). Последнее в результате ряда преобразований и применения определения оператора $B_{abx}^{n,\lambda}$ можно привести к виду удобному для дальнейшего исследования. Далее применив теорему 1 нетрудно определить $\nu(x)$:

$$\nu(x) = A_{abx}^{1,\lambda}[\varphi_b'(x) - \varphi_a'(x)] - \varphi_a(a)A_{abx}^{1,\lambda}\left\{\frac{d}{dx}J_0\left[\lambda\sqrt{(x-a)(b-a)}\right]\right\} -$$

$$-A_{abx}^{1,\lambda}\left\{\int_a^b \frac{d}{dx}J_0\left[\lambda\sqrt{(x-a)(b-t)}\right]\varphi_a'(t)dt\right\} - A_{abx}^{1,\lambda}\left\{\int_a^x \frac{d}{dx}J_0\left[\lambda\sqrt{(x-t)(b-a)}\right]\varphi_a'(t)dt\right\}. \qquad (11)$$

Подставив функцию $v(x)$, определенную формулой (11) в (10), находим решение задачи Гурса (6)-(8) в явном виде.

Последовательное применение равенств 1-6 позволяет преобразовать формулу определения решения $u(\xi,\eta)$ задачи Гурса для уравнения (6) с краевыми условиями (7)-(8) к виду

$$U(\xi,\eta)=\varphi_a(b)J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-a)(\eta-b)}\right]+$$

$$+\int_a^{\xi} J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-t)(\eta-b)}\right]\varphi_a'(t)dt-\int_{\eta}^{b} J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-a)(\eta-t)}\right]\varphi_a'(t)dt.$$

Возвращаясь теперь к переменным x и y находим регулярное решение задачи Гурса для уравнения (3) с краевыми условиями (4)-(5) в виде

$$u(x,y)=\psi_a[(a+b)/2]J_0\left[\lambda\sqrt{(x+y-a)(x-y-b)}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^{x+y} J_0\left[\lambda\sqrt{(x+y-t)(x-y-b)}\right]\psi_a'[(t+b)/2]dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x-y}^{b} J_0\left[\lambda\sqrt{(x+y-a)(x-y-t)}\right]\psi_a'[(a+t)/2]dt\,.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа посвящена исследованию свойств операторов типа Бесселя. В заключение можно сделать следующие выводы по результатам исследований:

1) Выявлены новые свойства операторов вида (1) и (2).

2) Установлены новые формулы взаимной обратимости операторов (1) и (2).

3) Изучена суперпозиция введенных операторов с операторами дифференцирования и интегрирования.

4) Полученные результаты применены к решению краевой задачи Гурса для уравнения Гельмгольца.

5) Именно, благодаря свойствам операторов (1) и (2) решение поставленной краевой задачи получено в явном и удобном для дальнейших исследований виде.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: Фан, 1997.

168 с.

[2] Салахитдинов М.С., Эргашев Т.Г. О свойствах некоторых операторов дробного интегро-дифференцирования с функцией Бесселя в ядрах// В книге

Избранные научные труды М.С.Салахитдинова. Ташкент, "Mumtoz so'z", 2013. С. 474-478.

[3] Эргашев Т.Г. Обобщенные решения одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода со спектральным параметром//*Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2017, №46. С.41-49.

[4] Уринов А.К., Эргашев Т.Г. Конфлюэнтные гипергеометрические функции многих переменных и их применение к нахождению фундаментальных решений обобщенного уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами//*Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2018, № 55, С.45-56.

[5] Ergashev T.G., Hasanov A. Fundamental solutions of the bi-axially symmetric Helmholtz equation//*Uzbek Mathematical Journal*, 2018, №1. 55-64.

[6] Эргашев Т.Г., Сафарбоева Н.М. Задача Дирихле для многомерного уравнения Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом//*Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2019, № 62, 55-67.

[7] Эргашев Т.Г., Сафарбаева Н.М. Задача Холмгрена для многомерного уравнения Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом//*Бюллетень Института математики*, 2020, № 1. С.127-135.

[8] Ergashev T.G. Fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with several singular coefficients and confluent hypergeometric functions of many variables. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, Vol. 41, №1. 15-26.

[9] Уринов А.К., Окбоев А.Б. Видоизмененная задача Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода // Украинский математический журнал. –Киев. 2020. Т. 72, № 1. –С. 100 – 118.

[10] Okboev A.B. A Cauchy-Goursat problem for the second kind degenerated hyperbolic equation with a spectral parameter // Uzbek Mathematical Journal. – Tashkent. 2019. №3. – p. 112-125.

[11] Urinov A.K., Okboev A.B. Nonlocal Boundary-Value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation of the Second Kind // Lobachevskii Journal of Mathematics Vol.41, no.9, 2020. –Pp. 1886–1897

[12] Mamanazarov A.O. A nonlocal problem for a parabolic hyperbolic equation with singular coefficients // Uzbek Math. Journal. 2021, Volume 65, Issue 1, pp.118-136.

[13] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.