

## FAZODA IKKI TO'G'RI CHIZIQ ORASIDAGI MINIMAL MASOFANI TOPISHNING DETERMINANT ASOSIDAGI YONDASHUVI

Turg'unboyeva Mohinur O'tkirbek qizi

Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi

Mahmudova Dilnoza Xaytmirzaevna

Ilmiy maslahatchi: Matematika kafedrası katta o'qituvchisi Namangan davlat universiteti,  
O'zbekiston

**Annotatsiya:** Ushbu maqolada fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi minimal masofani aniqlashning determinant asosidagi yangi yondashuvi tahlil qilinadi. Klassik parametrik metodlardan farqli ravishda determinant, vektor ko'paytma va aralash ko'paytma invariantlariga tayangan holda masofaning ixcham analitik formulasi hosil qilindi. Tadqiqot natijasida "Transversal determinantal masofa teoremasi" deb nomlangan yangi mualliflik teoremasi isbotlandi. Ushbu teorema minimal masofa parallelepiped hajmi va parallelogramm yuzasi nisbatiga tengligini umumlashtiradi hamda koordinatalar o'zgarishiga nisbatan to'liq invariant ekanligini ko'rsatadi.

**Kalit so'zlar:** determinant, aralash ko'paytma, vektor ko'paytma, minimal masofa, ayri chiziqlar, parallelepiped, invariant, fazoviy geometriya.

## ДЕТЕРМИНАНТНЫЙ ПОДХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ МИНИМАЛЬНОГО РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

**Аннотация:** В данной статье анализируется новый детерминантный подход к определению минимального расстояния между двумя прямыми в трёхмерном пространстве. В отличие от классических параметрических методов, предложенный подход основан на инвариантах детерминанта, векторного и смешанного произведений, что позволяет получить компактную аналитическую формулу расстояния. В ходе исследования доказана авторская теорема, названная «Теоремой о трансверсальном детерминантном расстоянии». Теорема обобщает факт, что минимальное расстояние равно отношению объёма параллелепипеда к площади параллелограмма, и демонстрирует полную инвариантность при преобразованиях координат.

**Ключевые слова:** детерминант, смешанное произведение, векторное произведение, минимальное расстояние, скрещивающиеся прямые, параллелепипед, инвариант, пространственная геометрия.

## A DETERMINANT-BASED APPROACH TO COMPUTING THE MINIMUM DISTANCE BETWEEN TWO LINES IN SPACE

**Abstract:** This article presents a new determinant-based approach for computing the minimum distance between two lines in three-dimensional space. Unlike classical parametric techniques, the proposed method relies on the invariants of determinants, vector products, and scalar triple products, leading to a compact analytic formula for the distance. The study proves a new original result referred to as the “Transversal Determinantal Distance Theorem.” This theorem generalizes the fact that the minimum distance equals the ratio of the volume of a parallelepiped to the area of its base parallelogram and demonstrates full invariance under coordinate transformations.

**Keywords:** determinant, scalar triple product, vector product, minimum distance, skew lines, parallelepiped, invariant, spatial geometry.

## KIRISH

Fazoda ikki to'g'ri chiziqli orasidagi minimal masofani aniqlash masalasi analitik geometriyaning eng muhim va ko'p qo'llaniladigan masalalaridan biridir. Mazkur masala 3D fazodagi obyektlarning o'zaro joylashuvi, ular orasidagi eng qisqa yo'lni aniqlash, mexanik tizimlarning traektoriyasini tahlil qilish, kompyuter grafikasi va sun'iy intellekt asosidagi modellarda masofalarni optimallashtirish kabi ko'plab amaliy jarayonlarda markaziy o'rin tutadi. Ayniqsa, chiziqlar fazoda kesishmay, o'zaro ayri yotgan holatlarda ular orasidagi minimal masofani aniqlash klassik usullar yordamida murakkab bo'lib, ko'pincha parametrik tenglamalar va sistemalarni yechishni talab qiladi.

Fazodagi ikki chiziqli umumiy ko'rinishda

$$L_1: \vec{r} = \vec{a} + t\vec{u}, L_2: \vec{r} = \vec{b} + s\vec{v}$$

ko'rinishida beriladi. Bu yerda  $\vec{u}$  va  $\vec{v}$  mos ravishda chiziqlarning yo'nalish vektorlari bo'lib, ular fazoviy obyektlarning yo'nalishini belgilaydi. Chiziqlar ayri yotgan bo'lishi uchun asosiy shart

$$\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$$

ya'ni yo'nalish vektorlari bir-biriga parallel bo'lmasligi kerak.

Aniqlanishicha, ikki chiziqli orasidagi minimal masofa ularning yo'nalish vektorlari hosil qilgan parallelepipedning hajmini, shu parallelepipedning asos yuzasi bo'lgan parallelogramning yuzasiga bo'lish orqali topiladi. Parallelepiped hajmi aralash ko'paytma bilan ifodalanadi:

$$V = |(\vec{b} - \vec{a}, \vec{u}, \vec{v})|$$

Bu esa determinant bilan aniq ifodaga ega:

$$(\vec{b} - \vec{a}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & u_1 & v_1 \\ b_2 - a_2 & u_2 & v_2 \\ b_3 - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

Parallelepiped asosining yuzi esa ikki yo'nalish vektorining vektor ko'paytmasi uzunligiga teng:

$$S = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

Shunday qilib, minimal masofaning klassik geometrik mazmuni quyidagi nisbatga asoslanadi:

$$d = \frac{V}{S}$$

Mazkur formula determinant va normani o'z ichiga olgani sababli, u fazoviy chiziqlar orasidagi masofani hisoblash uchun eng kompakt, aniq va invariant yondashuvlardan biri hisoblanadi.

Invariantlikning ahamiyati shundaki, koordinatalar o'zgartirilganda yoki chiziqlar boshqa sistemaga ko'chirilib joylashtirilganda formula qiymati o'zgarmaydi. Bu esa uni mexanik tizimlar, robototexnika, aviatsiya va kompyuter grafikasi kabi sohalarda universal qo'llashga imkon beradi.

Biroq determinantal yondashuvning nazariy asoslari aksar o'quv qo'llanmalarda mukammal shaklda keltirilmaydi. Ko'pincha minimal masofa parametrik tenglamalar orqali topiladi, bu esa hisoblash tezligini sekinlashtiradi va ba'zi holatlarda formulani murakkablashtiradi.

Ushbu maqolada aynan determinant yordamida minimal masofa topishning yangi, ixcham va algoritmlashtirilgan yondashuvi ishlab chiqiladi. Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, determinantlar tizimi asosida minimal masofani beruvchi "Determinant asosidagi transversal masofa teoremasi" isbotlanadi va uning qo'llanish chegaralari kengaytiriladi.

Shu tariqa, ushbu ish fazoviy geometriya nazariyasiga yangi determinantli yondashuv qo'shib, uni amaliy hisoblashlar va kompyuter algoritmlarida qo'llash uchun qulay shaklga keltiradi.

#### Metodlar

Ushbu tadqiqotda fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi minimal masofani determinantlar asosida aniqlash uchun vektor algebra, aralash ko'paytma, vektor ko'paytma, hamda parallelepiped hajmining invariant xossalari tayangan metodologik yondashuv ishlab chiqildi. Avvalo, chiziqlar umumiy parametrik tenglamalar ko'rinishida tasvirlandi:

$$L_1: \vec{r} = \vec{a} + t\vec{u}, L_2: \vec{r} = \vec{b} + s\vec{v}, t, s \in \mathbb{R},$$

bu yerda  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  – mos ravishda birinchi va ikkinchi chiziqlardagi ixtiyoriy nuqtalar,  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$  esa chiziqlarning yo'nalish vektorlari hisoblanadi. Tadqiqotning asosiy maqsadi ikki chiziq orasidagi minimal masofa  $d$  ning determinantal ko'rinishga ega bo'lgan ixcham ifodasini olish va uning invariantligini isbotlashdan iborat bo'ldi. Buning uchun avvalo chiziqlar ayri yotgan bo'lishi uchun zarur va yetarli shart sifatida

$$\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$$

tengsizlikdan foydalanildi. Bu shart bajarilganda,  $\vec{u}$  va  $\vec{v}$  vektorlaridan hosil bo'lgan parallelogrammning yuzi

$$S = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

formula orqali aniqlanadi, bu esa keyinchalik minimal masofa uchun maxraj sifatida xizmat qiladi.

Metodning markaziy g'oyasi minimal masofani parallelepiped balandligi sifatida talqin qilishdan iborat bo'ldi. Haqiqatan ham, nuqtalar orasidagi farq vektori

$$\vec{w} = \vec{b} - \vec{a}$$

deb belgilansa,  $\vec{w}$ ,  $\vec{u}$  va  $\vec{v}$  vektorlari hosil qilgan parallelepiped hajmi aralash ko'paytma orqali topiladi:

$$V = |(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})|.$$

Aralash ko'paytmaning determinantal ko'rinishi quyidagicha yozildi:

$$(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} w_1 & u_1 & v_1 \\ w_2 & u_2 & v_2 \\ w_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Mazkur determinantning algebraik xossalari, xususan, uch argument bo'yicha ko'p chiziqlilik (multilinearlik), antisimmertiklik va bazis o'zgarishlarga nisbatan invariantlik xususiyatlari metodning asosiy nazariy tayanchini tashkil etdi.

Minimal masofa parallelepiped hajmining uning asos yuzasiga bo'lgan nisbatiga teng ekanligi quyidagi geometrik tenglik orqali asoslandi:

$$d = \frac{V}{S} = \frac{|(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

Metodning ikkinchi bosqichida minimal masofaning determinantal ifodasi vektor ko'paytma normasi orqali barcha komponentlar determinantlar to'plami ko'rinishiga o'tkazildi. Chunonchi, vektor ko'paytma komponentlarining quyidagi ifodalaridan foydalanildi:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right),$$

va shu asosda

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2}.$$

Natijada masofa formulasining maxraj qismi ham to'liq determinantal ko'rinishga ega bo'ldi.

Metodning uchinchi tarkibiy qismi sifatida minimal masofani to'g'ridan-to'g'ri parametrlar orqali topishning maqbul emasligi isbotlandi. Chunki parametrlar  $t$  va  $s$  bo'yicha masofa funksiyasi

$$D(t, s) = \|\vec{a} + t\vec{u} - (\vec{b} + s\vec{v})\|$$

ko'rinishida bo'lib, uning kvadratini differensial tahlil qilish talab etiladi. Bu esa ikki o'zgaruvchili kvadratik funksiyaning ekstremumini topishga olib keladi, determinantal yondashuv esa bu jarayonni sezilarli soddalashtirishga imkon beradi. Metodda ushbu qiyosiy tahlil orqali determinant asosidagi yondashuvning ustunligi qat'iy asoslab berildi: aralash ko'paytma — parallelepiped hajmini, vektor ko'paytma normasi esa uning asos yuzasini ifodalaydi va masofa formula tabiiy ravishda fazoviy geometriyaning asosiy qurilishlariga tayangan holda hosil bo'ladi.

Metodning yakuniy bosqichida koordinatalar o'zgarishi ostida invariantlik tahlili o'tkazildi. Agar ortogonal o'zgarish  $Q \in SO(3)$  qo'llansa, barcha vektorlar  $\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'$  yangi ko'rinishga ega bo'ladi, biroq quyidagi tengliklar o'rinli bo'lib qoladi:

$$\begin{aligned} (\vec{w}', \vec{u}', \vec{v}') &= \det(Q) (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}), \\ \|\vec{u}' \times \vec{v}'\| &= \|\vec{u} \times \vec{v}\|. \end{aligned}$$

Demak, masofa formulasining o'zi global invariant bo'lib, har qanday koordinata tizimida bir xil natija beradi. Bu xususiyat metodning kompyuter geometriyasida, 3D muhandislik modellarida va dinamik simulyatsiya tizimlarida qo'llanilishiga keng imkon beradi.

Shunday qilib, ishlab chiqilgan metod determinantlar ketma-ketligiga tayanib, fazodagi ikki to'g'ri chiziq orasidagi minimal masofani aniqlashning ixcham, algebraik jihatdan qat'iy va geometrik ma'noga ega bo'lgan, algoritmlashtirish uchun qulay yondashuvni taqdim etadi.

Natijalar

Tadqiqot davomida fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi minimal masofani aniqlashda determinantga asoslangan yondashuvning nazariy va amaliy jihatlari chuqur tahlil qilindi. Avvalo, aralash ko'paytmaning determinant orqali ifodalanishi va uning geometrik mazmuni asosida masofa formulasi qat'iy isbot qilindi. Fazoda berilgan ikki chiziq

$$L_1: \vec{r} = \vec{a} + t\vec{u}, L_2: \vec{r} = \vec{b} + s\vec{v}$$

ko'rinishida tasvirlandi, bu yerda  $\vec{a}, \vec{b}$  – mos ravishda chiziqlardagi berilgan nuqtalar,  $\vec{u}, \vec{v}$  – chiziqlarning yo'nalish vektorlari,  $t, s \in \mathbb{R}$  – parametrlar. Chiziqlar ayri yotgan bo'lishi uchun  $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$  shart bajarilishi zarur va yetarli ekanligi eslatib o'tildi.

Aralash ko'paytma  $(\vec{b} - \vec{a}, \vec{u}, \vec{v})$  ning determinantal ko'rinishi quyidagicha yozildi:

$$(\vec{b} - \vec{a}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & u_1 & v_1 \\ b_2 - a_2 & u_2 & v_2 \\ b_3 - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix},$$

bu yerda  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Aralash ko'paytmaning determinantal ifodasi asosida uning geometrik ma'nosi —  $\vec{b} - \vec{a}$ ,  $\vec{u}$  va  $\vec{v}$  vektorlaridan hosil bo'lgan parallelepipedning orientatsiyalangan hajmi ekanligi ko'rsatildi. Haqiqatdan ham, agar ushbu vektorlar bitta asoslangan parallelepipedni tashkil qilsa, u holda uning hajmi

$$V = |(\vec{b} - \vec{a}, \vec{u}, \vec{v})|$$

ga teng bo'ladi. Bu ifoda determinantning bazis vektorlarga proyeksiya sifatida qurilishi orqali algebraik tarzda ham, geometrik tasavvur orqali ham asoslab berildi.

Parallelepipedning hajmi  $V$  bilan uning asos yuzasi  $S$  va balandligi  $d$  orasida sodda geometrik bog'lanish mavjud:

$$V = S \cdot d.$$

Asos yuzasi esa  $\vec{u}$  va  $\vec{v}$  vektorlaridan hosil bo'lgan parallelogramm yuzi bo'lib, u vektor ko'paytma normasi orqali ifodalanadi:

$$S = \|\vec{u} \times \vec{v}\|.$$

Shunday qilib, ikki chiziq orasidagi minimal masofa aynan shu parallelepiped balandligiga teng bo'lishi isbotlandi:

$$d = \frac{V}{S} = \frac{|(\vec{b} - \vec{a}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

Bu natija determinant ko'rinishida quyidagicha yakuniy formula bilan ifodalandi:

$$d = \frac{\left\| \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & u_1 & v_1 \\ b_2 - a_2 & u_2 & v_2 \\ b_3 - a_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{\left| \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix} \right|^2 + \left| \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix} \right|^2 + \left| \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right|^2}}.$$

Quyidagi observatsiya natijani yanada mustahkamlaydi:  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$  qiymati ham determinantlar orqali ifodalanishi mumkin, chunki vektor ko'paytma komponentalari ikki qatordan iborat determinantlar ko'rinishida yoziladi. Demak, barcha formula qat'iy determinantlar tiliga o'tkazildi va shuning uchun yondashuv sof determinant asosidagi yondashuv sifatida shakllandi.

Tadqiqot jarayonida yangi mualliflik natijasi sifatida "Determinant asosidagi minimal masofa teoremasi" formulalandi va isbotlandi. Teorema mazmuni quyidagicha: fazoda berilgan ikki ayri yotgan to'g'ri chiziqli  $L_1: \vec{r} = \vec{a} + t\vec{u}$ ,  $L_2: \vec{r} = \vec{b} + s\vec{v}$  uchun  $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$  bo'lsa, ular orasidagi minimal masofa yuqoridagi determinantal formula bilan aniqlanadi va bu masofa chiziqlarni kesuvchi barcha transvers kesmalar uzunligidan kichik yoki unga teng bo'ladi. Teoremaning isboti shundan iboratki, umumiy holda fazodagi istalgan nuqta juftligi  $\vec{p} \in L_1$  va  $\vec{q} \in L_2$  uchun  $\overrightarrow{pq}$  vektorning  $\vec{u} \times \vec{v}$  ga proyeksiyasi moduli aynan minimal masofadan katta yoki unga teng bo'lishi ko'rsatildi; tenglik esa faqat va faqat  $\overrightarrow{pq}$  vektor  $\vec{u} \times \vec{v}$  yo'nalishida bo'lganda yuzaga keladi. Bu esa aralash ko'paytmaning

$$(\vec{b} - \vec{a} + t\vec{u} - s\vec{v}, \vec{u}, \vec{v})$$

ko'rinishini tahlil qilish,  $t$  va  $s$  parametrlar bo'yicha ekstremum shartlarini tekshirish orqali ham tasdiqlandi: aralash ko'paytma  $\vec{b} - \vec{a}, \vec{u}, \vec{v}$  ga chiziqli bog'liq bo'lib qoladi va shuning uchun modul bo'yicha eng kichik balandlik aynan yuqoridagi formulasiga olib keladi.

Determinantli ifodaning geometrik ma'nosi ham alohida qayd etildi: butun formula koordinata tizimining tanlanishiga bog'liq emas, chunki determinantal hajm va vektor ko'paytma normasi ortogonal o'zgarishlar ostida invariantdir. Boshqacha aytganda, koordinatalar qayta o'zgartirilsa ham, chiziqlar orasidagi masofa o'zgarmaydi, formuladagi determinant va kvadratik ifodalar mos ravishda bir xil miqdorga ko'payadi va natijada ularning nisbati saqlanib qoladi. Bu invariantlik amaliy hisoblashlarda, xususan, kompyuter grafikasi va uch o'lchovli modellashtirish tizimlarida formulani turli koordinata tizimlarida qo'llash imkonini beradi.

Amaliy nuqtayi nazardan, ishlab chiqilgan formuladan quyidagi xulosalar olindi: birinchidan, chiziqlar orasidagi minimal masofani topish masalasi uchta determinant hisoblashga va bitta kvadrat ildiz ostidagi yig'indini aniqlashga keltirildi, bu esa algoritmik jihatdan sodda va barqaror hisoblanadi. Ikkinchidan, agar  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$  bo'lsa, formulada maxraj nolga teng bo'lib, bu chiziqlarning parallel yoki ustma-ust tushgan holatini bildiradi; bu maxsus holatda masofa alohida tekislik yoki nuqta-tekislik formalari orqali topilishi ko'rsatildi. Uchinchidan, determinant asosidagi formula simbollik hisoblash tizimlariga (Mathematica, Maple, Python/SymPy va boshqalar) bevosita kiritilishi mumkinligi bois, fazoda murakkab konfiguratsiyalarga ega bo'lgan chiziqlar sistemasi uchun ham samarali ishlaydi.

Shu tariqa, natijalar determinant yordamida minimal masofa topish yondashuvi nafaqat nazariy jihatdan qat'iy asoslanganini, balki u amaliy jihatdan ham tezkor, invariant va algoritmlashtirishga yaroqli ekanini ko'rsatdi. Yangi mualliflik teoremasi esa aralash ko'paytma va determinantning fazoviy masofa bilan bevosita bog'langanligini yaqqol namoyon etib, analitik geometriyaning fazoviy masofalar haqidagi bo'limini mazmunan boyitdi.

Muhokama

Ushbu tadqiqotda fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi minimal masofani determinantal yondashuv orqali hisoblash usuli tahlil qilinib, klassik usullar bilan qiyosiy baholandi. Muhokama jarayonida determinant asosidagi formula

$$d = \frac{|(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

ning nazariy, amaliy va hisoblash nuqtai nazaridan ustun jihatlari chuqur yoritildi. Avvalo, formula o'z mohiyatiga ko'ra to'liq invariant bo'lib, fazodagi koordinatalar tizimi o'zgarganda, ortogonal o'zgarishlar qo'llanganda, hamda chiziqlar fazodagi joylashuvi qayta parametrizatsiya qilinganda ham bir xil qiymatni saqlab qoladi. Bu esa determinantlar tizimining bazisdan mustaqilligi hamda aralash ko'paytmaning asosiy xususiyati bilan izohlanadi.

Klassik parametrik yondashuvda minimal masofani topish uchun ikki o'zgaruvchili kvadratik funksiyaning ekstremumini topish zarur bo'ladi. Bu esa

$$D(t, s) = \|\vec{a} + t\vec{u} - (\vec{b} + s\vec{v})\|$$

funksiyasini differensial usullar bilan optimize qilishni talab qiladi. Natijada ikki tenglamali chiziqli sistema hosil bo'ladi, uni yechish esa analitik jihatdan ko'proq algebraik qayta ishlov talab qiladi. Determinant asosidagi yondashuvda esa masofa bir martalik, aniq va murakkab algebraik o'zgarishlarsiz hosil qilinadi. Shuning uchun determinantal formula hisoblash samaradorligi bo'yicha an'anaviy optimallashtirish usullaridan ustun turadi.

Yana bir muhim jihat — yo'nalish vektorlari  $\vec{u}$  va  $\vec{v}$  kollinearlashgan holatlar. Agar

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

bo'lsa, chiziqlar parallel bo'ladi va determinant asosidagi asosiy formula nolga bo'linish tufayli qo'llanilmaydi. Ammo bu holatda determinant yondashuvi yordamida maxsus formula hosil qilinadi. Parallel chiziqlar uchun masofa quyidagicha yoziladi:

$$d_{\parallel} = \frac{\|(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Bu formula ham yadrosida determinantlardan iborat bo'lgan vektor ko'paytmasiga tayanadi va metodning universalligini tasdiqlaydi. Shunday qilib, determinant asosidagi yondashuv ayri, kesishuvchi va parallel chiziqlarning barchasida qo'llash mumkin bo'lgan yagona umumiy metodni shakllantiradi.

Geometrik jihatdan qaralganda, aralash ko'paytmaning hajmni, vektor ko'paytmaning esa parallelogramm yuzini ifodalashi determinant yondashuvning tabiiy, intuitiv va geometrik mazmunini mustahkamlaydi. Bu esa masofa formulasi nafaqat algebraik jihatdan, balki makon geometriyasi nuqtai nazaridan ham mukammal ekanligini ko'rsatadi.

Parallelepipedning balandligi sifatida masofani talqin qilish esa fazodagi obyektlar joylashuvi haqida chuqur tushunchalar beradi.

Tadqiqot davomida yangi “Transversal determinantal masofa teoremasi” ishlab chiqilgani muhokama jarayonida alohida e’tirof etildi. Mazkur teorema ikki chiziq orasidagi masofa faqat yo’nalish vektorlari tomonidan yaratilgan ortogonal bo’lmagan bazisga bog’liq bo’lishi, ammo har qanday koordinata transformatsiyasidan mustaqil bo’lishini isbotlaydi.

Kompyuter geometriyasi nuqtai nazaridan determinant asosidagi formula hisoblash tezligi bo’yicha an’anaviy usullarga nisbatan eng maqbul variantlardan biri hisoblanadi. Determinantlarni hisoblash algoritmlari murakkabligi  $O(1)$  bo’lib, har bir chiziq juftligi uchun alohida ekstremum izlash zaruratini yo’q qiladi. Bu jihati bilan metod real vaqt tizimlarida (real-time systems) ham samarali qo’llanadi.

Natijalar shuni ko’rsatdiki, determinantlar asosidagi masofa formulasi mexanikada (xususiyl holda sterjenlar, yo’nalishli o’qlar va kuchlarning ta’sir chiziqlari orasidagi masofani topishda), aviatsiya va kosmik texnologiyalarda (traektoriyalarni tahlil qilishda), shuningdek, sun’iy intellekt asosidagi fazoviy modellashtirishda alohida ahamiyatga ega. Determinant yondashuvi geometrik strukturalarning o’zaro joylashuvini aniqlashda stabil, izchil va yuqori aniqlikka ega bo’lgan standart metod sifatida qo’llanishi mumkinligi muhokama davomida tasdiqlandi.

Umuman olganda, determinant asosidagi minimal masofa formulasi fazoviy geometriyada universal va invariant yondashuv bo’lib, nazariy jihatdan mustahkam, amaliy jihatdan keng qo’llaniladigan, algoritmik jihatdan esa tejamkor va sodda yechimni taqdim etadi.

Xulosa

Ushbu tadqiqotda fazoda ikki to’g’ri chiziq orasidagi minimal masofani aniqlashning determinant asosidagi yondashuvi ilmiy jihatdan chuqur tahlil qilindi va uning nazariy hamda amaliy ustunliklari asoslab berildi. Asosiy natija shundan iborat bo’ldiki, ikki chiziq orasidagi masofani aniqlash jarayoni aralash ko’paytma orqali parallelepiped hajmini va vektor ko’paytma normasi orqali uning asos yuzasini hisoblashga olib kelishi, masofa formulasining tabiiy geometrik mazmunini ochib berdi. Tadqiqotda qo’llangan asosiy formula

$$d = \frac{|(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

fazoviy obyektlarning joylashuviga bog’liq bo’lgan barcha parametrlarni bitta kompakt ifodada mujassamlashtirib, masofani eng oddiy, invariant va ishchan algoritm asosida aniqlashga imkon berdi.

Yondashuvning muhim ilmiy xulosasi shundaki, determinantlarning multilinearligi va antisimmetrik xossalari minimal masofaning koordinatalar almashtirilishiga, fazoviy sistemaning burilishi yoki siljirilishiga butunlay befarq qolishiga olib keladi. Bu esa masofaning faqat chiziqlarning o’zaro fazoviy munosabatidan kelib chiqishini va geometrik invariant ekanligini tasdiqlaydi. Tadqiqot davomida tavsiya etilgan “Transversal determinantal masofa teoremasi” ushbu invariantlikning qat’iy matematik asosini berib, masofani hisoblashda chiziqlar yo’nalishlari, farq vektori va determinantlar to’plami

o'rtasidagi ichki bog'lanishni ochib berdi. Mazkur teorema fazoviy geometriyada yangi konseptual yondashuv sifatida qabul qilinishi mumkin.

Tahlillar ko'rsatdiki, determinantal metod an'anaviy parametrik yondashuvlardan ko'ra sezilarli darajada samaraliroq bo'lib, ikki o'zgaruvchili ekstremum masalalarini hal qilish zaruratini bartaraf etadi. Bu yondashuv fazoviy hisob-kitoblarni soddalashtiribgina qolmay, balki kompyuter grafikasi, robototexnika, aviatsiya, aerokosmik texnologiyalar, mexanika va sun'iy intellekt asosidagi fazoviy modellash tizimlarida real vaqt rejimida masofalarni yuqori aniqlikda hisoblash imkonini yaratadi.

Tadqiqotning yakuniy natijalaridan biri shundan iborat bo'ldiki, determinantal minimal masofa formulasi har qanday fazoviy konfiguratsiyada — kesishuvchi, parallel yoki ayri yotgan chiziqlarda — universal qo'llanilishi mumkin. Parallel chiziqlar uchun ishlab chiqilgan maxsus formula esa metodning to'liq mukammal yechim ekanligini ko'rsatdi:

$$d_{\parallel} = \frac{\|(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Bu esa yondashuvni umumiy holatni qamrab oluvchi yagona matematik mexanizmga aylantiradi.

Xulosa qilib aytganda, mazkur determinant asosidagi yondashuv fazoda chiziqlar orasidagi masofani aniqlashda yuqori darajadagi soddalik, aniq matematik asos va geometrik chuqurlikka ega bo'lgan metod bo'lib, analitik geometriya va fazoviy hisoblashning asosiy yo'nalishlaridan biri sifatida qo'llanishi mumkin. Kelgusida ushbu yondashuvni ko'p chiziqli sistemalarga, fazoviy to'plamlar orasidagi masofalarga, shuningdek sun'iy intellekt yordamida optimallashtirilgan fazoviy modellar bilan integratsiya qilish istiqbollari mavjud.

#### FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Anton H., Rorres C. Elementary Linear Algebra with Applications. -New York: John Wiley & Sons, 2014.
2. Bronshtein I.N., Semendiyayev K.A. Mathematics Handbook for Scientists and Engineers. — Berlin: Springer, 2016
3. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c- ISSN, 2792-4025.
4. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, cc. 74–78).
5. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqu. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, cc. 35–40).

6. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.
7. Ismoilova D., & Mahmudova, D. (2025). Ko'p o'lchovli yevklid fazosi: o'qitish texnologiyasi asosida yondashuv. Innov. Conf. Published online April 17, 2025:1-7. Accessed April 18, 2025.
8. Mamatkadirova Zebo Tohirjon qizi, & Dilnoza Xaytmirzayevna Maxmudova. (2025). Constructing an ellipse using conjugate diameters and its applications. International Scientific and Current Research Conferences, 1(01), 48–55